目　　录

第一部分　小　波　变　换

第二部分　小波变换 MATLAB 工具的应用

第一部分　小 波 变 换

小波理论是近十几年发展起来的新的信号处理技术，因其在时间域和频率域都可达到高的分辨率，被称为“数学显微镜”，在数值信号处理领域应用广泛，发展非常快。但其涉及较多的数学知识，以及巧妙的数字计算技巧，对于非数学专业的科研人员，要完全掌握其中的精妙之处，有一定的难度。正是考虑到这一点，本书的第一部分并不过多要求读者理解小波分析的数学理论，只是以尽量短的篇幅简要介绍必要的预备知识，并结合小波变换在地震学中的应用例子，着重阐明小波变换的物理意义，使读者能够尽快掌握小波变换的物理本质，应用到自己的实际工作中。

第一章　什么是小波变换

这一章用尽量短的篇幅和通俗的语言为那些只需要知道什么是小波变换的读者介绍小波变换的最基本概念。

§1.1　从傅里叶变换到小波变换

一、傅里叶变换

在信号处理中重要方法之一是傅里叶变换（Fourier Transform），它架起了时间域和频率域之间的桥梁。图 1.1 给出了傅里叶变换的示意图。



图 1.1　傅里叶变换示

对很多信号来说，傅里叶分析非常有用。因为它能给出信号中包含的各种频率成分。但是，傅里叶变换有着严重的缺点：变换之后使信号失去了时间信息，它不能告诉人们在某段时间里发生了什么变化。而很多信号都包含有人们感兴趣的非稳态（或者瞬变）特性，如漂移、趋势项、突然变化以及信号的开始或结束。这些特性是信号的最重要部分。因此傅里叶变换不适于分析处理这类信号。

二、短时傅里叶变换

为了克服傅里叶变换的缺点，D. Gabor (1946) 提出了短时傅里叶变换（Short Time Fourier Transform），又称为盖博(Gabor)变换或者加窗傅里叶变换（Windowed Fourier Transform）。图

1.2 给出了短时傅里叶变换的示意图。



图 1.2 短时傅里叶变换示意

盖博变换把一个时间信号变换为时间和频率的二维函数，它能够提供信号在某个时间段和某个频率范围的一定信息。这些信息的精度依赖于时间窗的大小。盖博变换的缺点是对所有的频率成分，所取的时间窗的大小都相同。然而，对很多信号为了获得更精确时间或频率信息，需要可变的时间窗。

三、小波变换

小波变换提出了变化的时间窗。当需要精确的低频信息时，采用长的时间窗，当需要精确的高频信息时，采用短的时间窗。图 1.3 给出了时间域信号、傅里叶变换、短时傅里叶变换和小波变换对比的示意图。

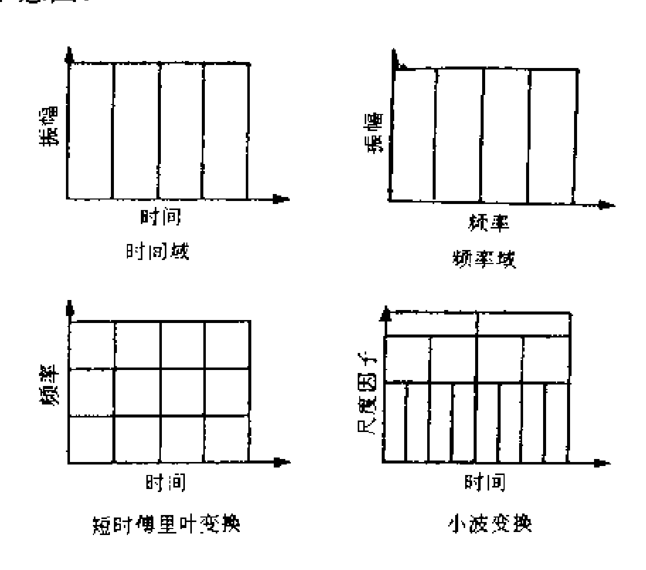


图 1.3 小波变换示意

由图 1.3 看出，小波变换用的不是时间—频率域，而是时间—尺度域。尺度越大，采用越大的时间窗，尺度越小，采用越短的时间窗，即尺度与频率成反比。

§1.2 连续小波变换

什么是小波？小波是一个衰减的波形，它在有限的区域里存在（不为零），且其均值为零。图 1.4 是一个 Daubechies 小波（db10）与正弦波的比较。

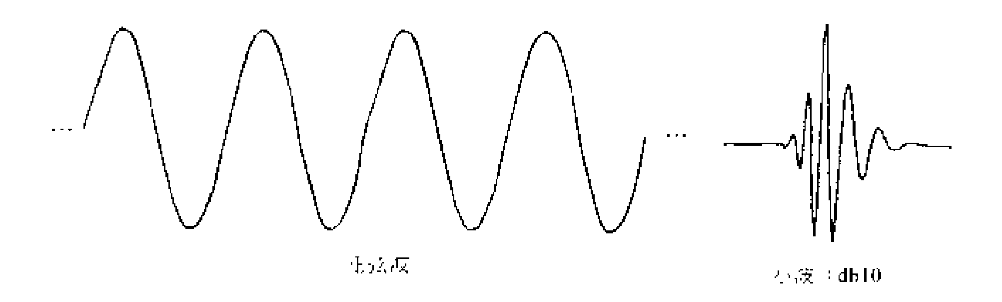


图 1.4　傅里叶变换与小波变换基元

正弦波是振幅不变、随时间无限振动的光滑波形，它是傅里叶变换的基础。由图看出，小波是尖锐变化而且是无规则的波形，这是小波变换的基础。因此用小波能更好地刻画信号的局部特性。

在数学上，傅里叶变换的公式为

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

积分是从 $-\infty$ 到 $+\infty$。图 1.5 给出了傅里叶变换的示意图。由图看出，原始信号是由不同的频率成分构成的。

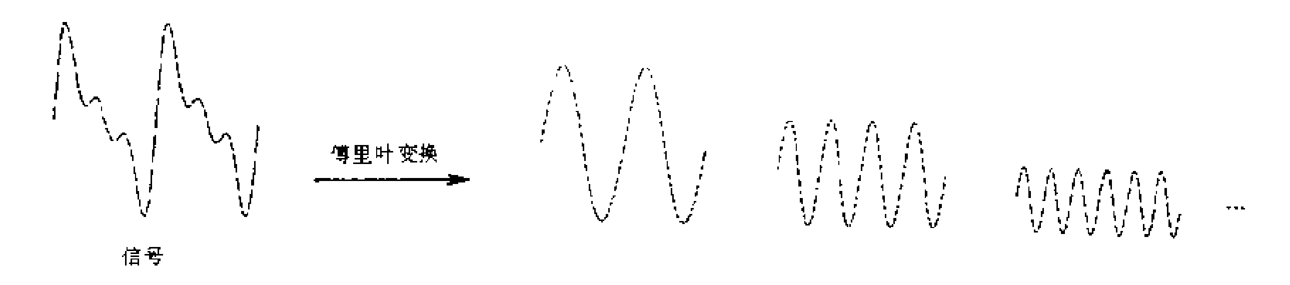


图 1.5　信号傅里叶变换过程

连续小波变换（Continue Wavelet Transform）的数学表示式为

$$\mathrm{CWT}_{a,b}=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{\psi_{a,b}(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$\psi_{a,b}(t)=|a|^{-1/2}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

式中，$\psi(t)$ 为小波；a 为尺度因子；b 为平移参数。图 1.6 是小波变换的示意图。由图看出，小波变换给出了在各个时刻信号是由哪些尺度的小波构成的。

小波中的尺度因子的作用是将小波在保持完全相似条件下“拉伸”或者“压缩”。图 1.7 给出了尺度因子的“拉伸”和“压缩”作用。

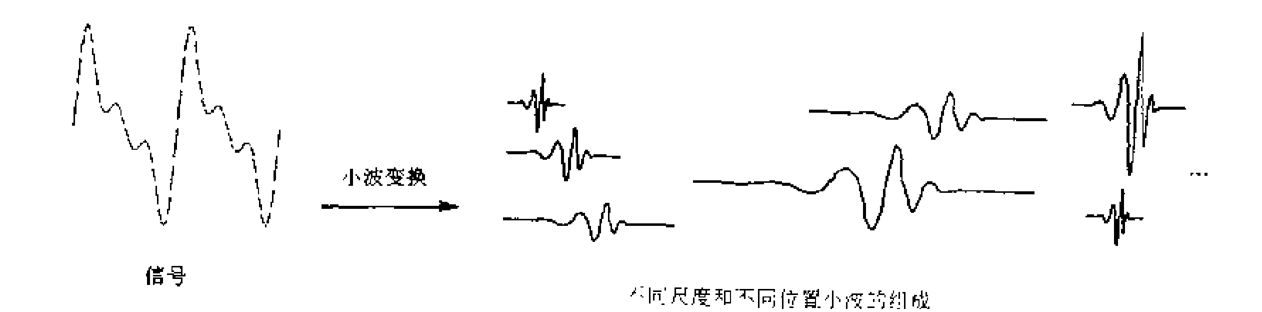


图 1.6　信号小波变换示意

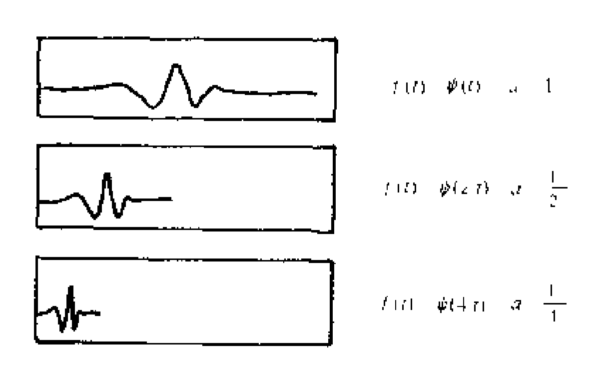


图 1.7　不同尺度下小波形状

小波中的位移参数，是简单地将波形沿时间轴平移。

连续小波变换$CWT_{a,b}$是参数 a 和 b 的函数。下面的五个步骤是获得$CWT_{a,b}$的最简单方法：

第一步，选择尺度 a 一定的小波，把它与原始信号的开始的一段进行比较。

第二步，计算$CWT_{a,b}$。它表示这段信号与尺度 a 小波的相关程度。$CWT_{a,b}$越大，二者越相似。这个结果依赖于所选择的小波的形状（图 1.8）。

第三步，向右移动小波，然后重复第一和第二步，直到处理完全部信号（图 1.9）。

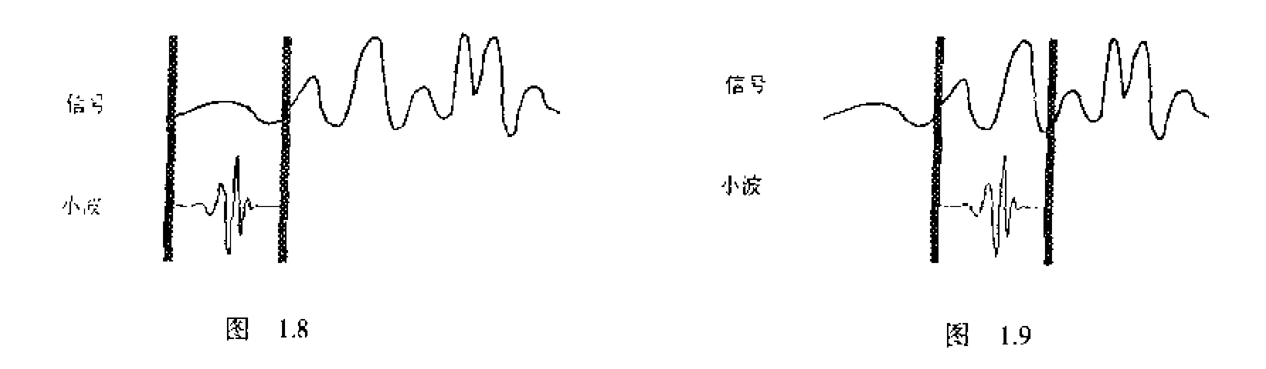


图　1.8　　　　图　1.9

第四步，增大小波的尺度因子（拉伸），重复第一到第三步。

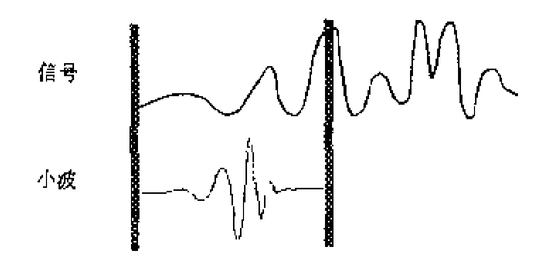


图 1.10

第五步，对全部尺度因子重复第一到第四步，得到的$CWT_{a,b}$通常用灰度图表示。图 1.11 是小波变换的灰度图例子。

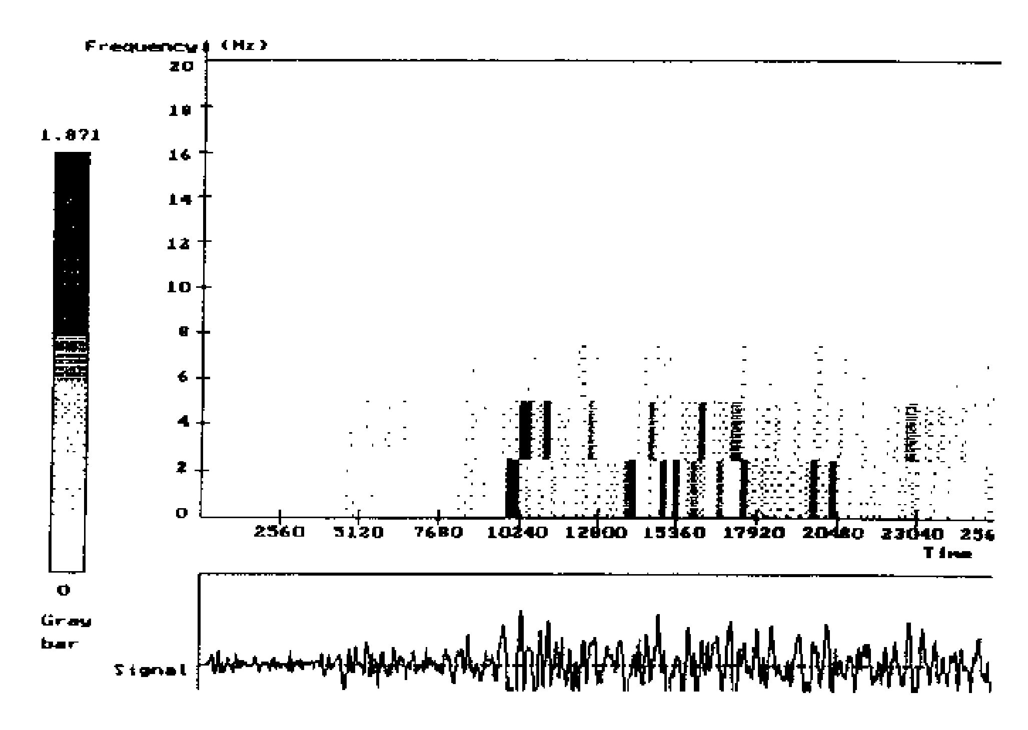


图 1.11　小波变换的灰度图

§1.3　离散小波变换

实际计算中不可能对全部尺度因子值和位移参数值计算$CWT_{a,b}$值，加之实际的观测信号都是离散的，所以信号处理中都是用离散小波变换（DWT）。大多数情况下是将尺度因子和位移参数按 2 的幂次进行离散。最有效的计算方法是 S. Mallat 于 1988 年发展的快小波算法（又称塔式算法）。

对任一信号，离散小波变换第一步运算是将信号分为低频部分（称为近似部分）和离散部分（称为细节部分）。近似部分代表了信号的主要特征。第二步对低频部分再进行相似运算。不过这时尺度因子已改变，依次进行到所需要的尺度。图 1.12 给出了一个信号经过第一次运

算后获得的近似部分和细节部分。

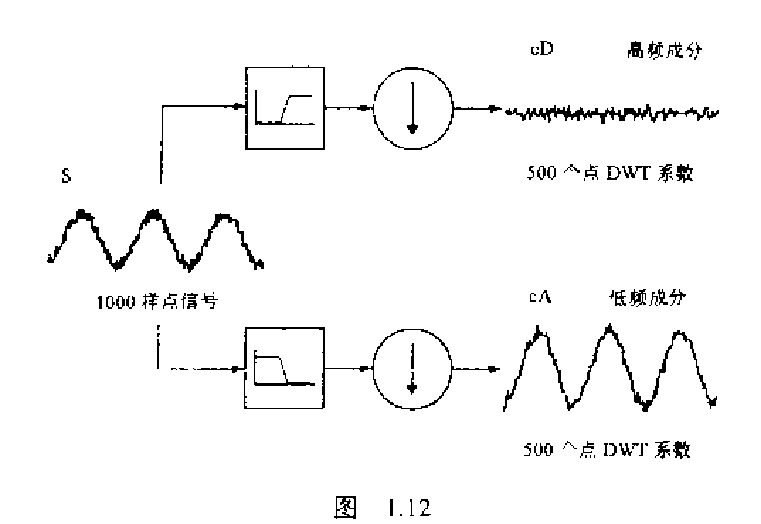


图 1.12

除了连续小波(CWT)、离散小波（DWT），还有小波包（Wavelet Packet）和多维小波。

第二章　预 备 知 识

本章包括三部分内容：傅里叶变换、短时傅里叶变换和滤波器。

§2.1　傅里叶变换

傅里叶变换是研究信号的频谱方法，是沟通频率域和时间域的桥梁，是小波变换的基础。

一、傅里叶变换的定义

傅里叶变换是频谱分析的基础。早期的频谱分析是采用傅里叶级数方法，称为调和分析。但是随着计算机的发展，调和分析已被傅里叶变换所代替。

给定实自变量 t 的非周期函数 $f(t)$（可以是实函数，也可以是复函数）做积分

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{2.1}$$

若积分式（2.1）对参数 ω 的任何实数值都存在，则称 $F(\omega)$ 为 $f(t)$ 的傅里叶变换，或称傅里叶积分。函数 $F(\omega)$ 一般是复数，可以写成

$$F(\omega)=R(\omega)+\mathrm{i}X(\omega)=A(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(\omega)} \tag{2.2}$$

$A(\omega)$ 称为函数 $f(t)$ 的傅里叶谱（振幅谱），$\Phi(\omega)$ 称为相位谱，$A^2(\omega)$ 称为能量谱。

$f(t)$ 可以用 $F(\omega)$ 的积分表示，称为傅里叶逆变换，

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{2.3}$$

式（2.1）和（2.3）是互相联系的积分方程，其中每一个方程式都是另一个方程式的解。

什么函数存在傅里叶变换？下面我们给出两个充分条件。

条件 1：若函数 $f(t)$ 绝对可积

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\mathrm{d}t<\infty \tag{2.4}$$

则它的傅里叶变换式（2.1）和它的逆变换式（2.3）存在。式（2.4）是充分条件，但不是必要条件。有不少函数不满足此条件，但其傅里叶变换存在。例如函数 $\frac{\sin at}{t}$ 不满足条件式(2.4)，但是它的傅里叶变换存在。

条件 2：若 $f(t)=g(t)\sin(\omega_0 t+\Phi_0)$，$\Phi_0$ 为任意常数，且假定当 $|t|>A>0$（A 为正实数）时，函数 $\frac{f(t)}{t}$ 是绝对可积的，$g(t)$ 是单调递减的，则 $F(\omega)$ 存在，且满足式（2.3）。

为了书写方便，以后用 $f(t)\leftrightarrow F(\omega)$ 表示函数 $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(\omega)$。

下面讨论几种特殊情况：

（1）$f(t)$ 为实函数。其傅里叶变换为

$$
\begin{aligned}
R(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t \\
X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

由式（2.5）看出，$R(\omega)$ 是 ω 的偶函数，$X(\omega)$ 是 ω 的奇函数，所以有

$$
F(-\omega) = R(-\omega) + \mathrm{i}X(-\omega) = R(\omega) - \mathrm{i}X(\omega) = F^*(\omega) \tag{2.6}
$$

这表明，实函数 $f(t)$ 的傅里叶变换当其自变量取负值时，等于 $F(\omega)$ 的共轭值。很易证明式（2.6）是 $f(t)$ 为实函数的充分必要条件。

对于实函数，逆变换公式为

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[R(\omega)\cos(\omega t) - X(\omega)\sin(\omega t)\right]\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[R(\omega)\cos(\omega t) - X(\omega)\sin(\omega t)\right]\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} A(\omega)\cos\left[\omega t + \Phi(\omega)\right]\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\int_{0}^{\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega
\end{aligned}
$$

（2）$f(t)$ 为虚函数。这时有

$$
R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t
$$

$$
X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t
$$

$R(\omega)$ 是 ω 的偶函数，$X(\omega)$ 是 ω 的奇函数，即

$$
F(-\omega) = -F^*(\omega) \tag{2.7}
$$

式（2.7）是 $f(t)$ 为虚函数的充分必要条件。

（3）因果函数。在实际物理问题中，时间函数 $f(t)$ 除了是实函数外，还要满足 $f(t)=0, t<0$。其物理意义为，若取物理现象发生的时刻 $t=0$，那么在该现象发生之前不可能有信息输出。因果函数 $f(t)$ 能够分别用 $R(\omega)$ 或 $X(\omega)$ 表示。对因果函数有 $f(-t)=0, t>0$。所以

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} R(\omega)\cos\omega t\mathrm{d}\omega \\
&= -\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} X(\omega)\sin\omega t\mathrm{d}\omega
\end{aligned} \qquad t>0 \tag{2.8}
$$

当 $t=0$ 时有

$$f(0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}R(\omega)\mathrm{d}\omega=\frac{f(0_+)}{2}$$

由式（2.8）看出，$R(\omega)$ 或 $X(\omega)$ 并不是相互独立的，因为把 $f(t)$ 的表示式代入式（2.5）中可得到下式

$$R(\omega)=-\frac{2}{\pi}\int_{-0}^{\infty}\int_0^{\infty}X(y)\sin yt\cos\omega t\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$

$$X(\omega)=-\frac{2}{\pi}\int_{-0}^{\infty}\int_0^{\infty}R(y)\cos yt\sin\omega t\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$

二、傅里叶变换的一些定理

傅里叶变换有一系列性质，这些性质对计算函数 $f(t)$ 的傅里叶变换在某些情况下很方便。

1. 线性

令 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的傅里叶变换为 $F_1(\omega)$ 和 $F_2(\omega)$，a_1 和 a_2 为任意常数，则有

$$a_1f_1(t)+a_2f_2(t)\leftrightarrow a_1F_1(\omega)+a_2F_2(\omega)$$

这个性质可推广到任意有限和的情况，若推广到无穷多的情况需要特殊证明。

2. 对称性

若 $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(\omega)$，则有

$$F(t)\leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

证明：$F(\omega)$ 的逆变换为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

用 $-t$ 代替 t，则有

$$f(-t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

交换变量 t 与 ω，则有

$$f(-\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

因此

$$F(t)\leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

3. 时标定理

函数 $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(\omega)$，而 a 为非零的任意常数，则

$$f(at)\leftrightarrow\frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})$$

这个定理在进行波谱比较时常常用到。小波变换中采用 a 作为尺度因子。

4. 时移定理

设 $f(t)$ 沿 t 轴移动一个常数 t_0，则傅里叶谱不变，但相角增加了线性项 $-\omega t_0$，即

$$f(t-t_0)\leftrightarrow F(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0}=A(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\varphi(\omega)-\omega t_0]}$$

这个定理表明，在计算 $f(t)$ 的频谱时，零点的选择并不影响其振幅，仅使其相位谱增加

一个线性项。在小波变换中采用t_0作为平移参数。

5. **频移定理**

函数$f(t)$的傅里叶变换为$F(\omega)$，则$f(t)e^{i\omega_0 t}$的傅里叶变换为$F(\omega-\omega_0)$，即

$$f(t)e^{i\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega-\omega_0)$$

6. **时间微商**

对式（2.3）微商n次，有

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n}=\frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega\right]=(i\omega)^n\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

所以

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow (i\omega)^n F(\omega)$$

上式并不保证$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$的傅里叶变换存在，只说明若变换存在的话，就由$(i\omega)^n F(\omega)$给出。

7. **频率微商**

形式上对式（2.1）微商n次，则有

$$\frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}=\int_{-\infty}^{\infty}(-it)^n f(t)e^{-i\omega t}dt$$

所以

$$(-it)^n f(t) \leftrightarrow \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$$

必须指出，$\frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$的存在并不保证$(-it)^n f(t)$的傅里叶变换存在，只有$(-it)^n f(t)$的傅里叶变换存在，该式才成立。

8. **共轭函数**

共轭函数$\overline{f(t)}$的傅里叶变换为$\overline{F(-\omega)}$，即

$$\overline{f(t)} \leftrightarrow \overline{F(-\omega)}$$

9. **时间函数的乘积**

设函数$f_1(t)$的傅里叶变换为$F_1(\omega)$，函数$f_2(t)$的傅里叶变换为$F_2(\omega)$，则$f_1(t)\cdot f_2(t)$的傅里叶变换$F(\omega)$为

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\gamma)F_2(\omega-\gamma)d\gamma=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega-\gamma)F_2(\gamma)d\gamma \tag{2.9}$$

证明：

$$\begin{aligned}F(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)f_2(t)e^{-i\omega t}dt\\&=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}f_2(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\gamma)e^{i\gamma t}d\gamma\right]dt\\&=\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\gamma)\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f_2(t)e^{-i(\omega-\gamma)t}dt\right]d\gamma\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\gamma)F_2(\omega-\gamma)d\gamma\end{aligned}$$

上式是采用窗函数的基础。小波变换的几个重要公式证明中用到式（2.9）。

10. 褶积定理

褶积又称卷积（Convolution）。设研究的函数为 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$，其褶积定义为

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t-\tau)f_2(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2.10}$$

称 $f(t)$ 为函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的褶积，并简单记为

$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)$$

这里*代表褶积。式（2.10）有如下三个性质：其一，若 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 是有界函数，则 $f(t)$ 为连续函数；其二，若 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 都是正的，则 $f(t)$ 也是正函数；其三，若 $t>A$ 时 $f_1(t)=0$，$t>B$ 时 $f_2(t)=0$，则有 $t>A+B$ 时，$f(t)=0$。

（1）时间褶积定理。

设时间函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的傅里叶变换为 $F_1(\omega)$ 和 $F_2(\omega)$，$f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的褶积为 $f(t)$，则 $f(t)$ 的傅里叶变换 $F(\omega)$ 等于 $F_1(\omega)$ 与 $F_2(\omega)$ 的乘积。即

若 $$f_1(t)\leftrightarrow F_1(\omega),\quad f_2(t)\leftrightarrow F_2(\omega)$$

则 $$\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau\leftrightarrow F_1(\omega)\cdot F_2(\omega) \tag{2.11}$$

证明：

$$\begin{aligned}F(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty}f_2(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\tau\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)F_2(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau=F_1(\omega)F_2(\omega)\end{aligned}$$

（2）褶积的导数。

若有 $f_1(t)\leftrightarrow F_1(\omega)$，$f_2(t)\leftrightarrow F_2(\omega)$，则有

$$[f_1(t)*f_2(t)]'=f_1'(t)*f_2(t)=f_1(t)*f_2'(t)\leftrightarrow \mathrm{i}\omega F_1(\omega)F_2(\omega)$$

证明：根据微分定理有

$$f_1'(t)\leftrightarrow \mathrm{i}\omega F_1(\omega),\quad f_2'(t)\leftrightarrow \mathrm{i}\omega F_2(\omega)$$

所以 $$f_1'(t)*f_2(t)\leftrightarrow \mathrm{i}\omega F_1(\omega)F_2(\omega)$$

$$f_1(t)*f_2'(t)\leftrightarrow F_1(\omega)\mathrm{i}\omega F_2(\omega)$$

又 $$[f_1(t)*f_2(t)]'\leftrightarrow \mathrm{i}\omega F_1(\omega)F_2(\omega)$$

从而有

$$[f_1(t)*f_2(t)]'\leftrightarrow f_1'(t)*f_2(t)=f_1(t)*f_2'(t)$$

（3）褶积的积分。

$$\int_{-\infty}^{t}[f_1(\lambda)*f_2(\lambda)]\mathrm{d}\lambda=f_1(t)*\int_{-\infty}^{t}f_2(\lambda)\mathrm{d}\lambda=f_2(t)*\int_{-\infty}^{t}f_1(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

证明：

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{t}[f_1(\lambda)*f_2(\lambda)]\mathrm{d}\lambda&=\int_{-\infty}^{t}[\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(\lambda-\tau)\mathrm{d}\tau]\mathrm{d}\lambda\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)[\int_{-\infty}^{t}f_2(\lambda-\tau)\mathrm{d}\lambda]\mathrm{d}\tau\\&=f_1(t)*\int_{-\infty}^{t}f_2(\lambda)\mathrm{d}\lambda\end{aligned}$$

同理可证明上式中的第二式。用类似的方法可以证明褶积的高阶导数和多重积分的运算公式。

令 $$s(t)=f_1(t)*f_2(t)$$

则有 $$s^{(i)}(t)=f_1^{(j)}(t)*f_2^{(i-j)}(t)$$

其中 i 和 j 为正整数时表示导数的阶数，取负整数时表示重积分的次数。

三、一些函数的傅里叶变换

下面介绍一些经常用到的函数的傅里叶变换。有的采用式（2.1）进行直接计算，多数是借助于傅里叶变换性质求得。

1. 矩形函数 $f(t)=P_T(t)$

矩形函数的形状如图 2.1 所示。

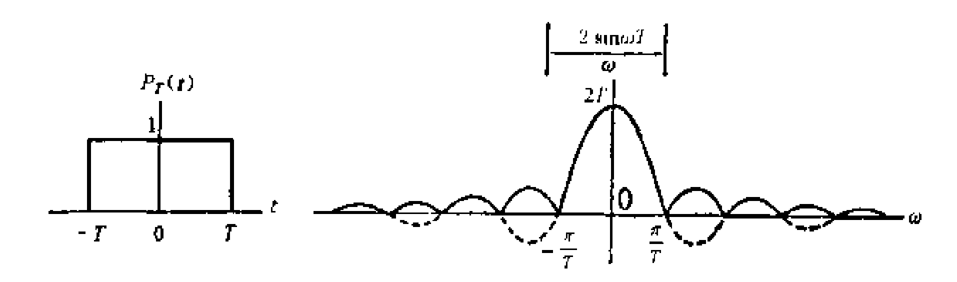


图 2.1　矩形函数及其傅里叶变换

$$P_T(t)=\begin{cases}1 & |t|\le T\\0 & |t|>T\end{cases}$$

其傅里叶变换为

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}P_T\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-T}^{T}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\frac{2\sin\omega T}{\omega}\tag{2.12}$$

图 2.1 给出了 $F(\omega)$ 的图形，实线为 $\left|\frac{2\sin\omega T}{\omega}\right| = A(\omega)$，虚线为实部 $R(\omega) = \frac{2\sin\omega T}{\omega}$，$P_T(t)$ 称为矩形窗。实际资料处理中经常采用 $P_{\frac{T}{2}}(t-\frac{T}{2})$，即

$$P_{\frac{T}{2}}(t-\frac{T}{2}) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < T \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

据时移定理有

$$P_{\frac{T}{2}}(t-\frac{T}{2}) \leftrightarrow \frac{\sin\frac{\omega}{2}T}{\frac{\omega}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\frac{T}{2}}$$

2. **傅里叶核** $\frac{\sin at}{\pi t}$

傅里叶核的形状如图 2.2。由对称性定理和矩形函数傅里叶变换可得

$$\frac{\sin at}{\pi t} \leftrightarrow P_a(-\omega)$$

但是

$$P_a(-\omega) = P_a(\omega) \tag{2.13}$$

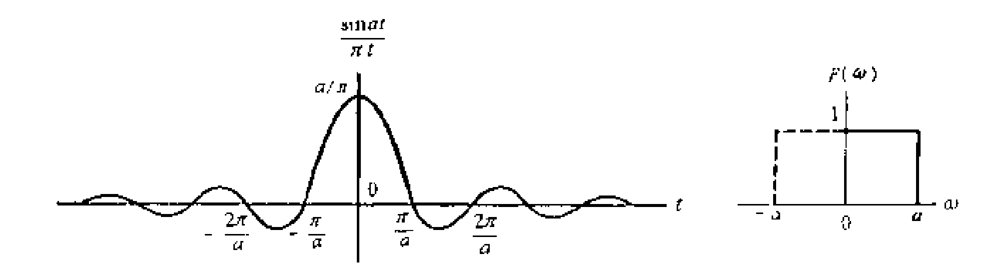


图 2.2　傅里叶核函数及其傅里叶变换

傅里叶核在频谱分析和滤波中是非常有用的函数，它与任意时间函数的褶积，使得这个函数的频谱在 $|\omega| > a$ 处被滤掉。

3. **高斯函数**

$$g(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \mathrm{e}^{-t^2/4a} \Leftrightarrow G(\omega) = \mathrm{e}^{-a\omega^2}$$

图 2.3 给出高斯函数及其傅里叶变换。

盖博变换中采用高斯函数作为窗函数。

4. **脉冲函数**

$$f(t) = \delta(t) \leftrightarrow F(\omega) = 1 \tag{2.14}$$

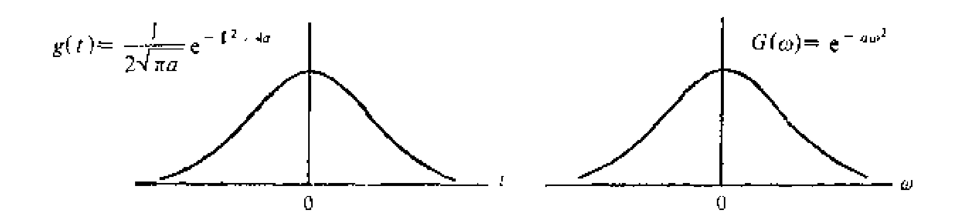


图 2.3　高斯函数及其傅里叶变换

根据时移定理和上式有

$$\delta(t-t_0)\leftrightarrow e^{-i\omega t_0}$$

根据对称性有

$$1\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

根据频移定理有

$$e^{i\omega_0 t}\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

5. **单位脉冲系列**

$$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_1)=\begin{cases}1 & t=nT_1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

将 $\delta_T(t)$ 展开为傅里叶级数（ $\omega_1=\dfrac{2\pi}{T_1}$ ）有

$$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{in\omega_1 t}$$

其中 $F_n=\dfrac{1}{T_1}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\delta_T(t)e^{-in\omega_1 t}dt=\dfrac{1}{T_1}$ 。

利用线性性质和 $e^{i\omega_0 t}$ 的傅里叶变换可得

$$\delta_T(t)\leftrightarrow F(\omega)=\frac{2\pi}{T_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_1)=\omega_1\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_1) \tag{2.15}$$

6. **抽样函数**

连续函数 $f(t)$，其傅里叶变换为 $F(\omega)$ 。用单位脉冲抽样函数 $\delta_T(t)$ 将 $f(t)$ 抽样为离散序列 $f_s(t)$ ，利用乘积函数傅里叶变换公式可得 $f_s(t)$ 的傅里叶变换为

$$F_s(\omega)=\frac{1}{T_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega-n\omega_s) \tag{2.16}$$

图 2.4 表示抽样函数 $f_s(t)$ 的傅里叶变换 $F_s(\omega)$。

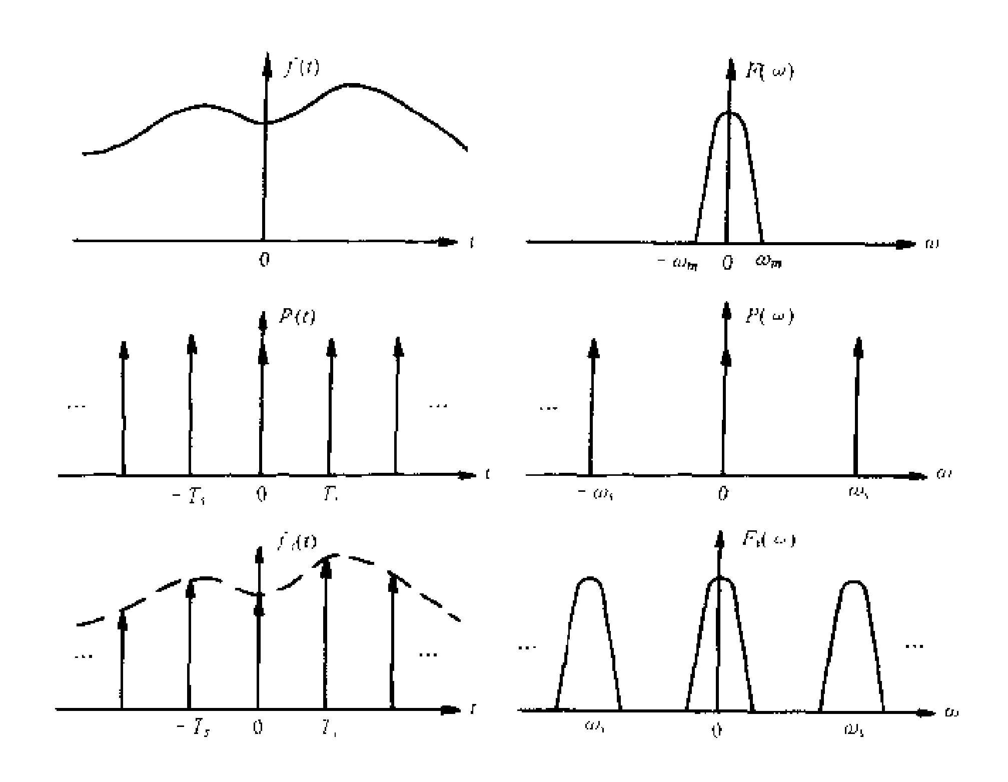


图 2.4　抽样函数及其傅里叶变换

四、巴什瓦（Parseval）公式

设函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的傅里叶变换为 $F_1(\omega)$ 和 $F_2(\omega)$，即

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega),\quad f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$$

则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\ f_2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(-\omega)\ F_2(\omega)\mathrm{d}\omega \tag{2.17}$$

证明：根据乘积函数傅里叶变换有

$$f_1(t)\ f_2(t)\mathrm{d}t \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1\ (\gamma-\omega)F_2(\omega)\mathrm{d}\omega$$

令 $\gamma=0$，则有式（2.17）。当 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 为实函数时，有 $F_1(-\omega)=\overline{F_1(\omega)}$，这时式（2.17）变为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1\ (t)\ f_2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{F_1(\omega)}F_2(\omega)\ \mathrm{d}\omega$$

当 $f_1(t)=f_2(t)=f(t)$ 时，式（2.17）变为更广泛采用的形式

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}A^2\ (\omega)\mathrm{d}\omega \tag{2.18}$$

证明：因为 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$，所以 $f^*(t) \leftrightarrow F^*(-\omega)$，

$$|f(t)|^2 = f(t)f^*(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F(\omega) * \overline{F^*(-\omega)}$$

即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 e^{-i\gamma t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \overline{F^*[-(\gamma-\omega)]} d\omega$$

令 $\gamma = 0$，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \overline{F^*(\omega)} d\omega$$

但 $F(\omega)\overline{F^*(\omega)} = A(\omega)$，从而得到式（2.18）。

在信号处理中巴什瓦定理表明，信号在时间域中的能量与频率域中的能量是守恒的．在小波变换的一些公式证明中用到巴什瓦公式。

五、信号的持续时间和不确定性原则

这里讨论信号 $f(t)$ 的长度对它的波谱性质的影响，以及不确定性原则。为此引进信号的持续时间的量度

$$D_t^{\ 2} = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \ |f(t)|^2 \ dt \tag{2.19}$$

D_t^2 可看成 $|f(t)|^2$ 的二阶矩。D_t^2 与 $f(t)$ 的傅里叶变换 $F(\omega)$ 的性质有关，D_t^2 在一定程度上量度了振幅谱 $A(\omega)$ 和相位谱 $\Phi(\omega)$ 随 ω 变化的情况。D_t^2 越大，$A(\omega)$ 和 $\Phi(\omega)$ 随 ω 变化越剧烈，其关系可定量表示为

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(\frac{dA}{d\omega})^2 + A^2 (\frac{d\Phi}{d\omega})^2 \right] d\omega$$

证明：因为 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$，根据频率微商公式有

$$(-it) f(t) \leftrightarrow \frac{dF}{d\omega} = \left(\frac{dA}{d\omega} + iA \frac{d\Phi}{d\omega} \right) e^{i\Phi}$$

根据巴什瓦公式有

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{dF}{d\omega} \right|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{dA}{d\omega} \right)^2 + A^2 \left(\frac{d\Phi}{d\omega} \right)^2 \right] d\omega$$

上式表明，信号 $f(t)$ 的持续时间越大，D_t^2 越大，则 $F(\omega)$ 的振幅谱和相位谱波动性越大，或者说波谱的结构越详细。

与信号 $f(t)$ 的持续时间相类似，可以定义 $F(\omega)$ 在频率里的持续性，用 D_ω^2 表示：

$$D_\omega^{\ 2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \ |F(\omega)|^2 \ d\omega \tag{2.19'}$$

为了研究 D_t^2 与 D_ω^2 的关系，可以简单地假定有

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A^2(\omega)\mathrm{d}\omega = 1$$

那么不确定性原则可表述为：如果函数 $f(t)$ 在无穷远处比 $\frac{1}{t^{1/2}}$ 消失的更快，即

$$\lim_{t\to\pm\infty} f(t)\sqrt{|t|} = 0$$

则有

$$D_t \cdot D_\omega \geq \frac{1}{2} \tag{2.20}$$

证明：用巴什瓦公式和施瓦兹（Schwarz）不等式可以证明式（2.20）。施瓦兹不等式为

$$\left|\int_a^b g_1 \cdot g_2 \mathrm{d}t\right|^2 \leq \int_a^b |g_1|^2 \mathrm{d}t \cdot \int_a^b |g_2|^2 \mathrm{d}t$$

令 $g_1(t) = tf(t), g_2(t) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$，代入上式，并令 $a = -\infty, b = \infty$，则有

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} tf(t)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |tf(t)|^2 \mathrm{d}t \cdot \int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|^2 \mathrm{d}t$$

积分上式左边有

$$\int_{-\infty}^{\infty} tf(t)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = t\frac{f^2(t)}{2}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2 \mathrm{d}t = -\frac{1}{2} \tag{2.21}$$

据时间微分和巴什瓦公式得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\omega A(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega \tag{2.22}$$

把式(2.21)和(2.22)代入施瓦兹不等式，得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}|tf(t)|^2 \mathrm{d}t \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\omega A(\omega)|^2 \geq \frac{1}{4}$$

即

$$D_t \cdot D_\omega \geq \frac{1}{2}$$

不确定性原则表明，信号 $f(t)$ 在时间域和频率域里的性质是互相制约的，不可能希望有那么一种信号，在时间域里持续时间很短，而频率域中的频率范围也很窄。例如，对某一信号 $f(t)$，如果只在很短的时间里测量了它的数值，根据测得的数据计算得到它的傅里叶谱，那么我们得到的谱一定分布在很宽的频率范围里，且谱的结构很模糊。

六、抽样定理

前面讨论了抽样函数傅里叶变换 $F_s(\omega)$ 与连续函数傅里叶变换 $F(\omega)$ 之间关系。现在要讨论连续函数 $f(t)$ 被抽样后变成 $f_s(t)$，如何从 $f_s(t)$ 恢复原来函数 $f(t)$ 呢？在什么条件下才能恢复呢？回答这个问题要用抽样定理。

1. 时间域抽样定理

假定连续函数 $f(t)$，其傅里叶变换满足

$$F(\omega)=0 \qquad |\omega|>\omega_m \tag{2.23}$$

若单位脉冲抽样函数的抽样间隔 $T_s \le \dfrac{\pi}{\omega_m}$（或者 $T_s \le \dfrac{1}{2f_m}$），则 $f(t)$ 唯一地由 $f_s(t)$ 决定：

$$f_s(t)=f(t)\delta(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n\delta(t-nT_s)$$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n\frac{\sin(\omega_m t-n\pi)}{\omega_m t-n\pi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n S_a(\omega_m t-n\pi) \tag{2.24}$$

证明：据式（2.16）有

$$F_s(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega-n\omega_s)$$

由假定 $T_s \le \pi/\omega_m$ 可知 $\omega_s \ge 2\omega_m$，这时 $F_s(\omega)$ 的谱是分离的。如果采用一个矩形谱 $H(\omega)$ 与 $F_s(\omega)$ 相乘，仅保留 $-\omega_m \sim \omega_m$ 之间的谱，使之恢复到原来的谱 $F(\omega)$，要求 $H(\omega)$ 满足

$$H(\omega)=\begin{cases}T_s & |\omega|<\omega_m\\ 0 & |\omega|>\omega_m\end{cases}$$

从而有：$F(\omega)=H(\omega)\ F_s(\omega)$

已知

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{T_s\omega_m}{\pi}S_a(\omega_m t)$$

$$f_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_n\delta(t-nT_s)$$

据褶积定理有

$$\begin{aligned}f(t)&=f_s(t)*h(t)\\&=\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_n\delta(t-nT_s)\right]*\frac{T_s\omega_m}{\pi}S_a(\omega_m t)\\&=\frac{T_s\omega_m}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_n S_a[\omega_m(t-nT_s)]\end{aligned}$$

令 $\omega_s=2\omega_m$，则

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_n S_a(\omega_m t-n\pi)$$

对于抽样定理给予如下几点说明：

① 如果抽样间隔$T_s > \frac{\pi}{\omega_m}$，即$\omega_s < 2\omega_m \left(T_s < \frac{1}{2f_m} \right)$，据式（2.16）和图2.4可知，$F_s(\omega)$的谱发生混叠，这时就无法分出$F(\omega)$了，即不可能由$f_s(t)$唯一地决定$f(t)$。频率$f_m = \frac{1}{2T_s}$称为耐奎斯特（Nyquist）频率。

② 如果$F(\omega)$不满足条件式（2.3），即$F(\omega)$在整个频率域中都有值，那么不论取T_s如何小，$F_s(\omega)$的谱总是混叠的。若$F(\omega)$随ω增大而很快衰减，这时取T_s足够小时，可使混叠减少到允许的误差范围以内。

③ 从物理上可对抽样定理作如下解释：一个频带受限制的信号，不可能在很短的时间里产生独立的、实质性的变化，它的最高变化速率受它的最高频率f_m控制。为了保留这个频率的全部信息，一个周期内至少要抽样两次，即要求$T_s \le \frac{1}{2f_m}$。

2. 频率域抽样定理

相似地，有频率域抽样定理。若函数$f(t)$满足

$$f(t)=0 \qquad |t|>t_m$$

其傅里叶变换$F(\omega)$唯一地由等间距点的数值$F(\frac{n\pi}{t_m})$所确定，即

$$F(\omega)=\sum F(\frac{n\pi}{t_m})\frac{\sin(\omega t_m - n\pi)}{\omega t_m - n\pi}$$

上式的证明步骤同前。

七、泊松（Poisson）公式

设函数$f(t)$的傅里叶变换$F(\omega)$，则有如下的泊松公式：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+nT)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0)e^{\mathrm{i}n\omega_0 t} \tag{2.25}$$

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

证明：把$f(t)$与单位脉冲系列褶积，

$$f(t)*\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-nT-\tau)\mathrm{d}\tau=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+nT) \tag{2.26}$$

根据褶积定理有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+nT) \leftrightarrow F(\omega)\cdot\frac{2\pi}{T}\sum\delta(\omega-n\omega_0)=\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(n\omega_0)\delta(\omega-n\omega_0) \tag{2.27}$$

采用傅里叶逆变换有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+nT)=\frac{1}{T}\sum F(n\omega_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega_0 t}$$

泊松公式有多种形式，如式（2.25）中取$t=0$,则有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(n\omega_0)$$

取$T=1$，则

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(2n\pi)$$

在式（2.25）中取$T=2\pi$，则

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+2n\pi)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$$

在上式中取$t=0$，则

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(2n\pi)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(n)$$

§2.2 滤波器简介

时间域中信号处理的重要方法之一是滤波。什么是滤波？狭义地说，把一个混合信号中的某分量分离出来或者把它去掉，就叫滤波。

一、连续滤波器

令滤波器的脉冲响应为$h(t)$，其傅里叶变换为$H(\omega)$，则滤波器在时间域里的计算公式为

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2.28}$$

其中，$f(t)$为输入；$g(t)$为输出。

根据褶积定理，在频率域中的计算公式为

$$\begin{aligned}G(\omega)&=H(\omega)F(\omega)\\H(\omega)&=A(\omega)\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(\omega)}\end{aligned} \tag{2.29}$$

式中，$G(\omega)$为$g(t)$的傅里叶变换；$F(\omega)$为$f(t)$的傅里叶变换。

任意信号通过滤波器后，其振幅和相位都要发生畸变，这种畸变就是滤波作用。例如，输入一个正弦波

$$f(t)=\sin\Omega t$$

$f(t)$ 的傅里叶变换为

$$F(\omega)=\frac{1}{\mathrm{i}}\pi\left[\delta(\omega-\Omega)-\delta(\omega+\Omega)\right]$$

因而输出 $g(t)$ 为

$$\begin{aligned}g(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\delta(\omega-\Omega)-\delta(\omega+\Omega)\right]A(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(\omega)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\\&=A(\Omega)\sin\left[\Omega t+\Phi(\Omega)\right]\end{aligned}$$

所以，振幅改变了 $A(\Omega)$ 倍，相位增加了 $\Phi(\Omega)$。称 $A(\omega)$ 为滤波器的振幅响应，$\Phi(\omega)$ 为滤波器的相位响应。

根据滤波振幅响应 $A(\omega)$，可将滤波器分为低通滤波、高通滤波、带通滤波和点阻滤波四种。图 2.5 为四种滤波器的示意图。第三章中将要介绍的小波变换就是带通滤波，因为小波滤波器的带宽和中心频率的比为常数（$Q=\omega_0/\Delta\omega$），又称为恒 Q 滤波器。

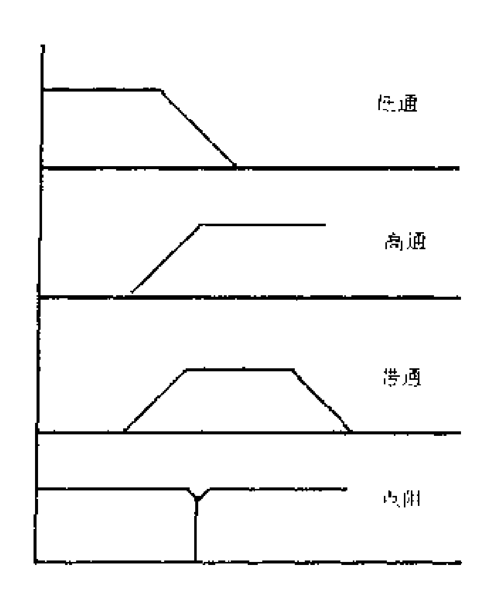


图 2.5　四种常用滤波器

根据滤波器的相位响应 $\Phi(\omega)$，可将其分为线性相位滤波和非线性相位滤波。$\Phi(\omega)$ 为 ω 的线性函数，称为线性相位滤波。由傅里叶变换的时移定理可知，这种滤波器对各种频率成分的时移是相同的，不会引起信号失真。因果函数的傅里叶变换的实部和虚部是相关的[见式（2.5）]，所以大多数因果滤波器有相位失真，紧支撑正交小波滤波器都是非线性相位的（后面讲到的 Haar 小波除外）。

二、相关滤波器

设滤波器的脉冲响应为 $h(t)$，其傅里叶变换为 $H(\omega)$，若输入 $f(t)$，输出 $g(t)$，则有

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$G(\omega)=H(\omega)F(\omega) \tag{2.30}$$

现考虑 $f(t)$ 与 $h(t)$ 的互相关，

$$r(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)f(t+\tau)\mathrm{d}\tau \overset{\xi=t+\tau}{=} \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi-\tau)f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$R(\omega)=F(\omega)\overline{H(\omega)} \tag{2.31}$$

比较式（2.30）和（2.31）可见，$f(t)$ 与 $h(t)$ 的互相关等价于 $f(t)$ 通过一个滤波器，该滤波器的振幅响应等于 $h(t)$ 的振幅响应，相位响应是 $h(t)$ 的负相位响应。称这种滤波器为相关滤波器，又称为镜像滤波。

三、数字滤波器

按脉冲响应的长短可将滤波器分为无限长脉冲系列滤波器（IIR）和有限长脉冲响应滤波器（FIR）两种类型。按滤波器构成也可分为两类：递归式和非递归式。

1. 褶积滤波器

非递归滤波器又称为褶积滤波器，滤波公式为

$$y_k=\sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j x_{k-j}$$

在有限项情况下

$$y_k=\sum_{j=-N_1}^{N_2} h_j x_{k-j}$$

2. 递归滤波器

递归滤波器又称为反馈滤波器，滤波公式为

$$y_k=\sum_{j=0}^{N} c_j x_{k-j}-\sum_{j=1}^{L} g_j y_{k-j}$$

L 称为滤波器的阶数。滤波器的系统函数为

$$H(z)=\frac{\sum_{j=0}^{N} c_j z^{-j}}{1+\sum_{j=1}^{L} g_j z^{-j}}$$

通常取 $N=L$。

§2.3 短时傅里叶变换

傅里叶变换架起了信号在时间域和频率域之间的桥梁。但是傅里叶变换只适用于稳态信号的分析处理，它不能给出时间信息。实际信号多数是非平稳过程，它的时变性质代表了信

号的本质，为了同时研究信号在时间域和频率域里的局部性质，D. Gabor（1946）在傅里叶变换基础上提出了加窗傅里叶变换（Windowed Fourier Transform），也称为短时傅里叶变换（STFT），还称为盖博变换。

一、短时傅里叶变换定义

把非稳态信号看成一系列短时平稳信号的叠加，这个过程是通过加时间窗来实现的（图2.6）。一般选用能量集中在低频处的实的偶函数作为窗函数 $g(t)$，通过平移 $g(t)$ 来实现时间域的局部化性质。记短时傅里叶变换为 $Gf(\omega,\tau)$：

$$Gf(\omega,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\overline{g_{\omega,\tau}(t)}\,\mathrm{d}t \tag{2.32}$$

式中，$g_{\omega,\tau}(t)=g(t-\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，$\overline{g_{\omega,\tau}(t)}$ 为 $g_{\omega,\tau}(t)$ 的共轭函数。

根据傅里叶变换的性质，窗口傅里叶变换是能量守衡的。即

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|Gf(\omega,\tau)|^2\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\tau$$

在假设 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\mathrm{d}t=1$ 条件下，窗口傅里叶变换的反演变换公式为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}Gf(\omega,\tau)g(t-\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\tau \tag{2.33}$$

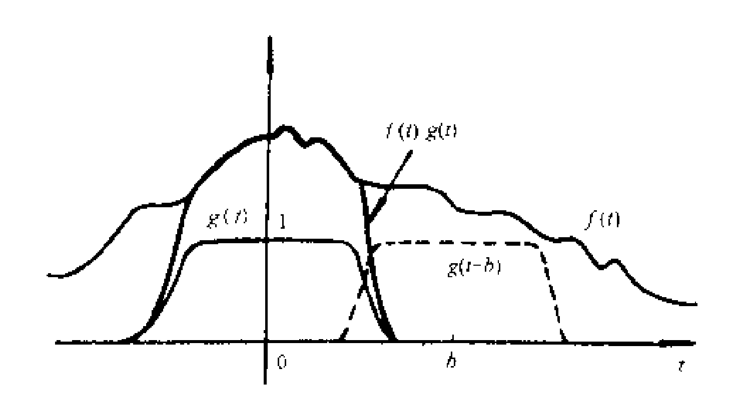


图2.6 窗口傅里叶变换示意

二、短时傅里叶变换的滤波解释

采用巴什瓦公式可以把式（2.32）用信号 $f(t)$ 和窗函数 $g_{\omega,\tau}(t)$ 的频谱表示。

因为 $$g_{\omega,\tau}(t)=g(t-\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\leftrightarrow G(\nu-\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\nu-\omega)\tau}$$

所以

$$\overline{g_{\omega,\tau}(t)}\leftrightarrow\overline{G(\nu-\omega)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\nu-\omega)\tau}$$

根据巴什瓦公式有

$$Gf(\omega,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\overline{g_{\omega,\tau}(t)}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\int_{-\infty}^{\infty}F(\nu)\overline{G(\nu-\omega)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\tau}\mathrm{d}\nu \tag{2.34}$$

上式表明，短时傅里叶变换可解释为滤波过程。$\overline{G(\nu)}$为低通窗函数$g(t)$的傅里叶变换，$\overline{G(\nu-\omega)}$为中心频率在ω处的带通滤波器，$F(\nu)\cdot\overline{G(\nu-\omega)}$为$f(t)$通过中心频率在$\omega$处的带通滤波器，最后乘上$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}$将滤波器输出平移到频率零处。因此短时傅里叶变换对任何频率ω都是以ω为中心的低通滤波器。

三、短时傅里叶变换的时间-频率局部化性质

短时傅里叶变换是通过时间窗$g(t-\tau)$来得到时刻τ的信号性质的，它是时间窗内信号性质的平均。时间窗的长度越短，获得的时间分辨率越高，由式（2.34）可看出，短时傅里叶变换又可看成信号$f(t)$的谱$F(\nu)$在频率ω处通过带通滤波器$\overline{G(\nu-\omega)}$，根据信号不确定性原则，要得到高的频率分辨率，就需要长的时间窗。因此，时间局部化性质和频率局部化性质是相互矛盾的。假设窗函数满足

$$\|g(t)\|^2=\frac{1}{2\pi}\|G(\omega)\|^2=1$$

且

$$\lim_{|t|\to 0}t|g(t)|^2=0$$

定义

$$t_0=\int_{-\infty}^{\infty}t|g(t)|^2\mathrm{d}t$$

$$\omega_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega|G(\omega)|^2\mathrm{d}\omega$$

$$\sigma_t^2=\int_{-\infty}^{\infty}|t-t_0|^2|g(t)|^2\mathrm{d}t$$

$$\sigma_\omega^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\omega-\omega_0)^2|G(\omega)|^2\mathrm{d}\omega$$

在信号不确定性原则部分已证明了

$$\sigma_t\cdot\sigma_\omega\geq\frac{1}{2}$$

这说明，时间t和频率ω的分辨率（即局部化性质）是受海森伯格（Heisenberg）不确定性原则制约的，选定了窗函数$g(t)$后，时间分辨率σ_t和频率分辨率σ_ω就确定了。用$\omega-t$二维图表示局部化性质（图 2.7）。由图看出，短时傅里叶变换的时间-频率分辨率的矩形小格子对任何频率都是固定不变的，这就使得短时傅里叶变换的时间-频率局部化性质受到了限制。如果对低频成分采用高的频率分辨率（即σ_ω小），对高频成分采用低的频率分辨率（即σ_ω大），但矩形小格子的面积不变（以满足海森伯格不确定性原则），这就是小波变换提高时间-频率局部化性质的途径。

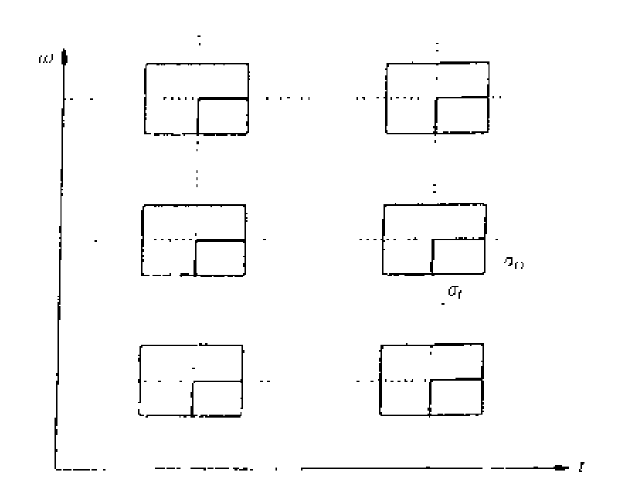


图 2.7　短时傅里叶变换时-频窗口

Gabor 选用的时间窗为高斯函数

$$g(t) = 2\sqrt[4]{a}\mathrm{e}^{-\pi a t^2}$$

$$G(\omega) = \sqrt[4]{\frac{2}{a}}\mathrm{e}^{-\pi\omega^2/a}$$

这时，$\sigma_t \cdot \sigma_\omega = \dfrac{1}{2}$。

第三章　连续小波变换

§3.1　引　　言

小波变换概念是1984年法国地球物理学家J.Morlet在分析处理地球物理勘探资料时提出来的。小波变换的数学基础是19世纪的傅里叶变换。其后理论物理学家A.Grossman 采用平移和伸缩不变性建立了小波变换的理论体系。1985年法国数学家Y.Meyer第一个构造出具有一定衰减性的光滑小波。1988年比利时数学家I.Daubechies证明了紧支撑正交标准小波基的存在性，使得离散小波分析成为可能。1989年S.Mallat提出了多分辨率分析概念，统一了在此之前的各种构造小波的方法，特别是提出了二进小波变换的快速算法，使得小波变换完全走向实用化。

小波变换采用改变时间-频率窗口形状的方法，很好地解决了时间分辨率和频率分辨率的矛盾，在时间域和频率域里都具有很好的局部化性质。对信号中的低频成分，采用宽的时间窗，得到高的频率分辨率；对信号中的高频成分，采用窄的时间窗，得到低的频率分辨率。小波变换的这种自适应特性，使它在工程技术和信号处理方面获得广泛应用。

§3.2　连续小波变换定义

设函数$\psi(t)\in L^2(R)$,满足下述条件

$$\int_R \psi(t)\mathrm{d}t=0 \tag{3.1}$$

称$\psi(t)$为基本小波(Prototype)。引入尺度因子（伸缩因子）a和平移因子b，a和b满足：

$$a,b\in R \quad 且\, a\neq 0$$

将基本小波进行伸缩和平移，得到下列函数族

$$\psi_{a,b}(t)=|a|^{-1/2}\,\psi(\frac{t-b}{a}) \tag{3.2}$$

称$\psi_{a,b}(t)$为分析小波，系数$1/\sqrt{a}$为归一化常数，它使得对所有尺度a和位移参数b，下式成立

$$\|\psi_{a,b}\|^2=\int_R|\psi_{a,b}(t)|^2\mathrm{d}t=\int_R|\psi(t)|^2\mathrm{d}t \tag{3.3}$$

通常取$\int_R|\psi|^2\mathrm{d}t=1$，其意义是$\psi(t)$具有单位能量，

函数$f(t)\in L^2(R)$的连续小波变换（CWT）定义为

$$\mathrm{CWT}_{a,b}=\int_R f(t)\overline{\psi_{a,b}(t)}\mathrm{d}t=|a|^{-\frac{1}{2}}\int_R f(t)\overline{\psi(\frac{t-b}{a})}\mathrm{d}t \tag{3.4}$$

式中，$\overline{\psi(t)}$为$\psi(t)$的共轭函数，若$\psi(t)$为实函数，则$\overline{\psi(t)}=\psi(t)$。

若基本小波$\psi(t)$满足下述条件：

$$\int_R \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|}\mathrm{d}\omega < \infty \tag{3.5}$$

则连续小波变换$\mathrm{CWT}_{a,b}$存在逆变换。逆变换公式为

$$f(t) = C_\Psi^{-1}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{a}}\psi_{a,b}(t)\cdot \mathrm{CWT}_{a,b}\frac{\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{a^2} \tag{3.6}$$

$$C_\Psi = \int_R \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|}\mathrm{d}\omega \tag{3.7}$$

称式（3.5）为容许条件（Admissibility Condition），称满足容许条件的小波为容许小波。

一、关于容许条件式（3.5）

（1）若$\psi(t)\in L^1(R)$，则$\Psi(\omega)$是连续函数，那么仅当$\Psi(\omega)|_{\omega=0}=0$或者等价地有

$$\int_R \psi(t)\mathrm{d}t = 0$$

时，容许条件式（3.5）成立。

（2）实际应用中，对$\psi(t)$往往加上比上述更严格的衰减条件，这时式（3.5）等价于

$$\int_R \psi(t)\mathrm{d}t = 0$$

二、关于尺度因子a

根据傅里叶变换的尺度定理

$$\psi(t) \leftrightarrow \Psi(\omega)$$

$$\psi(\frac{t}{a}) \leftrightarrow |a|\Psi(a\omega)$$

尺度因子a越小，$\psi_{a,b}(t)$的波形变窄，$\Psi_{a,b}(\omega)$的频谱向高频端扩展；a越大，$\psi_{a,b}(t)$的波形变宽，$\Psi_{a,b}(\omega)$的频谱向低频端扩展，从而实现了时间-频率窗的自适应调节。

三、小波变换逆变换式(3.6)的证明

傅里叶变换的巴什瓦公式（2.17）为

$$\int f(t)\psi(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\Psi(-\omega)\mathrm{d}\omega$$

连续小波变换公式为

$$\mathrm{CWT}_{a,b} = |a|^{-\frac{1}{2}}\int_R^{-\infty} f(t)\overline{\psi(\frac{t-b}{a})}\mathrm{d}t$$

先根据傅里叶变换的时移和共轭性质求出

$$\begin{cases} f(t) \leftrightarrow F(\omega) \\ \overline{\psi(\frac{t-b}{a})} \leftrightarrow a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega b}\overline{\Psi(-a\omega)} \end{cases} \tag{3.8}$$

将式（3.8）代入$\mathrm{CWT}_{a,b}$有

$$\mathrm{CWT}_{a,b}=|a|^{-\frac{1}{2}}\int_R f(t)\overline{\psi(\frac{t-b}{a})}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{a}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{ib\omega}\overline{\Psi(a\omega)}\mathrm{d}\omega \tag{3.9}$$

下面证明式（3.6）：设$a>0$

$$C_\psi^{-1}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\frac{1}{\sqrt{a}}\psi(\frac{t-b}{a})\mathrm{CWT}_{a,b}\frac{\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{a^2}$$

$$\overset{\text{代入式(3.9)}}{=\!=\!=}C_\psi^{-1}\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\mathrm{d}a\int_{-\infty}^\infty\psi(\frac{t-b}{a})\mathrm{d}b\int_{-\infty}^\infty F(\omega)\overline{\Psi(a\omega)}\frac{\mathrm{d}\omega}{a^2}$$

$$\overset{\tau=(t-b)/a}{=\!=\!=}\frac{C_\psi^{-1}}{2\pi}\int_0^\infty\mathrm{d}a\int_{-\infty}^\infty\mathrm{d}\omega\left[F(\omega)\overline{\Psi(a\omega)}\right]\int_{-\infty}^\infty\psi(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\tau\omega}\frac{\mathrm{d}\tau}{a}$$

$$=\frac{C_\psi^{-1}}{2\pi}\int_0^\infty\mathrm{d}a\int_{-\infty}^\infty F(\omega)\overline{\Psi(a\omega)}\Psi(a\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\frac{\mathrm{d}\omega}{a}$$

$$\overset{u=a\omega}{=\!=}C_\psi^{-1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\int_0^\infty\frac{|\psi(u)|^2\mathrm{d}u}{u}$$

$$=C_\psi^{-1}\cdot C_\psi\cdot f(t)$$

$$=f(t)$$

证毕。

§3.3 连续小波变换的物理意义

连续小波变换的实质是滤波器。据§2.2知道，滤波器在时间域和频率域中的表示式为

$$g(t)=\int_{-\infty}^\infty f(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$G(\omega)=F(\omega)\cdot H(\omega)$$

式中，$h(t)$是系统的脉冲响应；$H(\omega)$是滤波器的系统函数。

与连续小波变换公式

$$\mathrm{CWT}_{a,b}=\int_R|a|^{1/2}f(t)\overline{\psi(\frac{t-b}{a})}\mathrm{d}t$$

比较，小波变换的脉冲响应为

$$h(t)=|a|^{1/2}\overline{\psi(\frac{-t}{a})} \tag{3.10}$$

其系统函数为

$$H(\omega)=\sqrt{a}\cdot\overline{\Psi(a\omega)}$$

这种滤波器称为相关滤波器或者镜像滤波器。

由逆傅里叶变换公式可得

$$\mathrm{CWT}_{a,b}=\frac{1}{2\pi}\int_R\sqrt{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}b\omega}F(\omega)\overline{\Psi(a\omega)}\mathrm{d}\omega$$

该式正是式（3.9）。

下一节的讨论中将说明小波变换的滤波器是恒 Q 滤波器。

§3.4 连续小波变换的时间-频率特性

为了说明小波变换的时间-频率特性，引入时间-频率空间，该空间中横轴为时间，纵轴为频率，称为时频空间。在频率空间中的窗函数可能为单窗函数或者双窗函数。

一、时频空间

设函数 $w(t)\in L^2(R)$，且 $tw(t)\in L^2(R)$，定义单窗函数 $w(t)$ 在时频空间里的中心 (t_0,ω_0) 为

$$\begin{cases} t_0=\int_R t|w(t)|^2\mathrm{d}t/\|w\|^2 \\ \omega_0=\int_R \omega|W(\omega)|^2\mathrm{d}\omega/\|W\|^2 \end{cases} \tag{3.11}$$

其中，$\|w\|^2=\int_R|w(t)|^2\mathrm{d}t$；$\|W\|^2=\frac{1}{2\pi}\int_R|W(\omega)|^2\mathrm{d}\omega$

t_0 和 ω_0 相当于物体的重心，在这里可理解为在时间域里信息的中心和频率域里信息的中心。定义单窗函数在时频空间中的时宽 σ_t 和频宽 σ_ω 为

$$\begin{cases} \sigma_t=\left[\int_R(t-t_0)^2|w(t)|\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}}\Big/\|w\| \\ \sigma_\omega=\left[\frac{1}{2\pi}\int_R(\omega-\omega_0)^2|W(\omega)|^2\mathrm{d}\omega\right]^{\frac{1}{2}}\Big/\|W\| \end{cases} \tag{3.12}$$

时频空间中以 (t_0,ω_0) 为中心，以 $2\sigma_t$ 和 $2\sigma_\omega$ 为边长的矩形称为时频窗口(或分辨率窗口)。为了讨论方便，一般取 $(t_0,\omega_0)=(0,0)$，且 $\|w\|=1$。

时频空间中双窗函数的相似定义如下：

$$\begin{cases} t_0=\int_R t|w(t)|^2\mathrm{d}t/\|w\|^2 \\ \omega_0^-=\int_{-\infty}^0 \omega|W(\omega)|^2\mathrm{d}\omega/\|W\|^2 \\ \omega_0^+=\int_0^{\infty} \omega|W(\omega)|^2\mathrm{d}\omega/\|W\|^2 \end{cases} \tag{3.13}$$

σ_t、σ_ω^- 和 σ_ω^+ 定义为

$$\begin{cases} \sigma_t=\left[\int_R(t-t_0)^2[w(t)]^2\mathrm{d}t\right]\Big/\|w\| \\ \sigma_\omega^-=\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^0(\omega-\omega_0^-)^2[W(\omega)]^2\mathrm{d}\omega\right]^{\frac{1}{2}}\Big/\|W\| \\ \sigma_\omega^+=\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}(\omega-\omega_0^+)^2|W(\omega)|^2\mathrm{d}\omega\right]^{\frac{1}{2}}\Big/\|W\| \end{cases} \tag{3.14}$$

在时频空间中，以 (t_0,ω_0^-) 为中心，$2\sigma_t$ 和 $2\sigma_\omega^-$ 为边长的矩形为负时频窗口；以 (t_0,ω_0^+) 为

中心、$2\sigma_t$ 和 $2\sigma_\omega^+$ 为边长的矩形为正时频窗口。为了讨论方便，通常取 $t_0=0$，$\|w\|=1$，称这种双窗为标准双窗函数。

在信号不确定原则一节曾证明过，σ_t 和 σ_ω 必须满足下述关系：

$$\sigma_t \cdot \sigma_\omega \geq \frac{1}{2}$$

即信号的时间分辨率与频率分辨率是相互制约的。

二、$\psi_{a,b}(t)$ 的时频特性

由基本小波条件 $\int_R \psi(t)\mathrm{d}t=0$ 可推出

$$\Psi(0)=\int_R \psi(t)\mathrm{d}t=0$$

因此可知基本小波 $\psi(t)$ 是双窗函数。

在以下的讨论中，假定小波函数 $\psi(t)$ 是实的标准双窗函数。对 $\psi(t)$ 有中心 $t_0=0$，ω_0^+ 和 ω_0^-。下面讨论分析小波 $\psi_{a,b}(t)$ 的时频空间里的中心、时宽和频宽。

1. **时域中心 $t_{a,b}$**

$$\begin{aligned}
t_{a,b} &= \int_R t\left|\psi_{a,b}(t)\right|^2 \mathrm{d}t = \int_R t|a|^{-1}\left|\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\right|^2 \mathrm{d}t \\
&\xlongequal{(t-b)/a=\tau} \int_R (a\tau+b)\left|\psi(\tau)\right|^2 |a|^{-1}\cdot a\mathrm{d}\tau \\
&\xlongequal{a>0} \int_R (a\tau+b)\left|\psi(\tau)\right|^2 \mathrm{d}\tau \\
&= at_0+b
\end{aligned} \tag{3.15}$$

因为 $t_0=0$，所以

$$t_{a,b}=b$$

2. **频域中心 $\omega_{a,b}^{\pm}$**

$$\omega_{a,b}^- = \int_{-\infty}^0 \omega\left|\Psi_{a,b}(\omega)\right|^2 \mathrm{d}\omega$$

$$\Psi_{a,b}(\omega)=\int_R |a|^{-\frac{1}{2}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \xlongequal{(t-b)/a=\tau} \int_R |a|^{-\frac{1}{2}}\psi(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(a\tau+b)}a\mathrm{d}\tau$$

$$\xlongequal{a>0} \int_R \sqrt{a}\psi(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega\tau}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega b}\mathrm{d}\tau = \sqrt{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}b\omega}\Psi(a\omega)$$

所以

$$\omega_{a,b}^- = \int_{-\infty}^0 \omega a^{1/2}\left|\Psi(a\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}b\omega}\right|\mathrm{d}\omega = \frac{1}{a}\omega_0^- \tag{3.16}$$

同样可得

$$\omega_{a,b}^{-} = \frac{1}{a}\omega_0^{+} \tag{3.17}$$

3. **时宽**

$$\sigma_{t_{a,b}} = \left[\int_R (t - t_{a,b})^2 \left|\psi_{a,b}(t)\right|^2 \mathrm{d}t\right]^{1/2} = a\sigma_t \tag{3.18}$$

4. **频宽**

$$\sigma_{\omega_{a,b}}^{-} = \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} (\omega - \omega_0^{-})^2 \left|\Psi_{a,b}(\omega)\right|^2 \mathrm{d}\omega\right]^{1/2} = \frac{1}{a}\sigma_{\omega}^{-} \tag{3.19}$$

$$\sigma_{\omega_{a,b}}^{+} = \frac{1}{a}\sigma_{\omega}^{+}$$

讨论：根据上述结果，$\psi_{a,b}(t)$ 在时频空间里以 $(t_{a,b}, \omega_{a,b}^{-})$ 和 $(t_{a,b}, \omega_{a,b}^{+})$ 为中心确定了两个时频窗口，分别为

$$[b - a\sigma_t, b + a\sigma_t]\cdot\left[\frac{\omega_0^{-}}{a} - \frac{1}{a}\sigma_{\omega}^{-}, \frac{\omega_0^{-}}{a} + \frac{1}{a}\sigma_{\omega}^{-}\right]$$

和

$$[b - a\sigma_t, b + a\sigma_t]\cdot\left[\frac{\omega_0^{+}}{a} - \frac{1}{a}\sigma_{\omega}^{+}, \frac{\omega_0^{+}}{a} + \frac{1}{a}\sigma_{\omega}^{+}\right]$$

这两个时频窗口随着 a 和 b 的变化，其边长发生变化，但其窗口面积 S 不变：

$$S = 2a\sigma_t \cdot \frac{2}{a}\sigma_{\omega}^{\pm} = 4\sigma_t\sigma_{\omega}^{\pm} \tag{3.20}$$

面积 S 的大小由基本小波 $\psi(t)$ 的性质决定，与参数 a，b 无关。由于时频窗口边长的变化，使得小波变换既满足了信号不确定性原则，又提高了小波变换的时间频率分辨率。当 a 值小时，时频窗的时宽边短，而频宽边长，提高了对信号中高频成分的时间分辨率；当 a 值大时，时频窗的时宽边长，而频宽边短，提高了对信号中低频成分的频率分辨率。图 3.1 给出了 $\psi_{a,b}(t)$ 的时频窗口随尺度因子变化情况。

在前面的讨论中已指出，小波变换的物理本质是滤波器。由上面讨论的频率中心 $\omega_{a,b}^{\pm}$ 和频宽 $\sigma_{a,b}^{\pm}$ 可知，小波变换的滤波器的中心频率与带宽的比为常数，称为恒 Q 滤波器。

$$\frac{\omega_0^{\pm}}{a} \div \frac{1}{a}\sigma_{\omega}^{\pm} = \frac{\omega_0^{\pm}}{\sigma_{\omega}^{\pm}} \tag{3.21}$$

图 3.2 给出了小波变换恒 Q 滤波器的示意图。

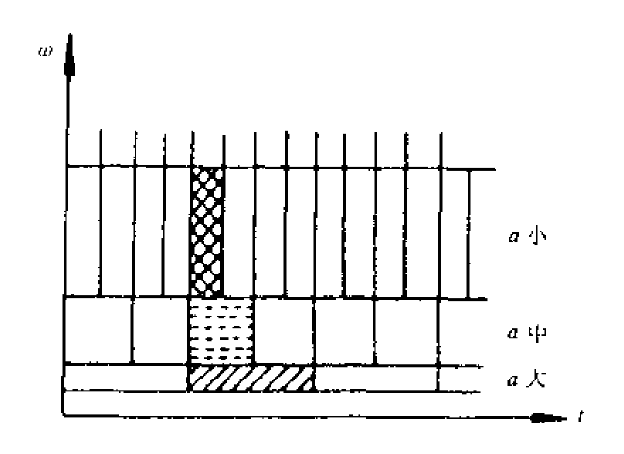


图 3.1　小波时频窗口随尺度变化示意

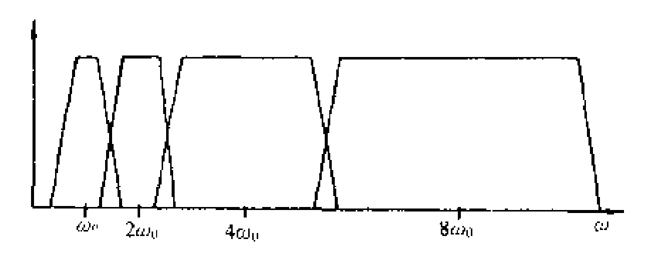


图 3.2　小波变换恒 Q 滤波器示意

§3.5　连续小波变换的性质

1. **线性**

连续小波变换是线性变换，即一个函数的连续小波变换等于该函数的分量的变换和。用公式表示如下：

$$f(t)=f_1(t)+f_2(t)$$

$$f(t)\leftrightarrow \mathrm{CWT}$$
$$f_1(t)\leftrightarrow \mathrm{CWT}_1$$
$$f_2(t)\leftrightarrow \mathrm{CWT}_2$$

则
$$\mathrm{CWT}=\mathrm{CWT}_1+\mathrm{CWT}_2$$

2. **时移性**

$$f(t)\leftrightarrow \mathrm{CWT}_{a,b}$$

则
$$f(t-t_0)\leftrightarrow \mathrm{CWT}_{a,b-t_0}$$

3. **时标定理**

$$f(t)\leftrightarrow \mathrm{CWT}_{a,b}$$

$$f(ct) \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{c}} \mathrm{CWT}_{ca,cb}$$

4. **微分运算**

$$\mathrm{CWT}_{a,b}\left(\frac{\partial^m f(t)}{\partial t^m}\right) = (-1)^m \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\partial^m}{\partial t^m} \overline{\psi_{a,b}(t)} \mathrm{d}t$$

以上性质只需简单推导即可证明。

5. **能量守恒**

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\mathrm{CWT}_{a,b}\right|^2 \frac{\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{a^2} \tag{3.22}$$

由式（3.9）知

$$\mathrm{CWT}_{a,b} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a^{1/2} F(\omega) \overline{\Psi(a\omega)} \mathrm{e}^{ib\omega} \mathrm{d}b$$

因此，$\mathrm{CWT}_{a,b}$ 的傅里叶变换为

$$\mathrm{CWT}_{a,b} \leftrightarrow a^{1/2} F(\omega) \overline{\Psi(a\omega)} \tag{3.23}$$

下面证明能量守恒公式。

由巴什瓦公式有

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \mathrm{d}a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2} \left|\mathrm{CWT}_{a,b}\right|^2 \mathrm{d}a\mathrm{d}b &= \int_0^{\infty} \mathrm{d}a \frac{1}{a^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a |F(\omega)|^2 |\Psi(a\omega)|^2 \mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \left[|F(\omega)|^2 \int_0^{\infty} \frac{\left|\Psi(a\omega)\right|^2}{a} \mathrm{d}a \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \left[|F(\omega)|^2 \int_0^{\infty} \frac{\left|\Psi(u)\right|^2}{u} \mathrm{d}u \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega \cdot C_\psi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}t \cdot C_\psi
\end{aligned}$$

证毕。

6. **冗余度**

连续小波变换是把一维信号变换到二维空间 $f(t) \leftrightarrow \mathrm{CWT}_{a,b}$，因此小波变换中存在多余的信息，称为冗余度（Redundancy）。因而小波变换的逆变换公式不是唯一的。从分析小波

$\psi_{a,b}(t)=a^{-1/2}\psi(\frac{t-b}{a})$角度看，$\psi_{a,b}(t)$是一族超完备基函数，它们之间是线性相关的．度量冗余度的量称为再生核$K(a_1,a_2,b_1,b_2)$．

$$K(a_1,a_2,b_1,b_2)=C_\psi^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}a_1^{-1/2}\psi(\frac{t-b_1}{a_1})a_2^{-1/2}\overline{\psi(\frac{t-b_2}{a_2})}\mathrm{d}t$$

再生核就是小波本身的小波变换。

再生核$K(a_1,a_2,b_1,b_2)$度量了小波变换二维空间里两点(a_1,b_1)与(a_2,b_2)之间的相关性大小。再生核K作用于小波变换$\mathrm{CWT}_{a,b}$仍得到$\mathrm{CWT}_{a,b}$，

$$\mathrm{CWT}_{a,b}=a^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}K(a,a',b,b')\mathrm{CWT}_{a',b'}\frac{\mathrm{d}b'\mathrm{d}a'}{a'^2} \tag{3.24}$$

将逆变换公式（3.6）代入式（3.4）即可证明式（3.24）。

第四章　离散小波变换

连续小波变换中，$CWT_{a,b}$ 中的参数 a 和 b 都是连续变化的值。实际应用中，信号 $f(t)$ 是离散序列，a 和 b 也须离散化，成为离散小波变换，记为 DWT（Discrete Wavelet Transform）。离散小波变换中的重要问题是是否存在逆变换。讨论这个问题涉及框架（Frame）理论。因此本章先简单介绍函数空间概念和框架理论的一些有关结果，然后介绍离散小波变换、二进小波变换和二进正交小波变换。

§4.1　函数空间及框架概念

一、函数空间

在分析数学的现代研究中，常常需要各种由函数组成的集类，称这些集类为函数空间。定义了函数之间的代数运算（向量加法及数与向量乘法）的空间称为线性空间。定义了函数（或者元素）之间距离的空间称为距离空间或者度量空间。定义了函数（或者元素）的范数（向量长的推广）的空间称为赋范空间；定义了函数之间内积（积分运算）的空间称为内积空间。

1. 预希尔伯特（Hilbert）空间

一个复线性空间 H，在其上赋予下面的内积定义

$$\begin{cases} 1.\ \text{线性} & \langle au+v,w\rangle = a\langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle \\ 2.\ \text{对称性} & \langle u,v\rangle = \overline{\langle u,v\rangle} \\ 3.\ \text{非负性} & \langle u,u\rangle \ge 0; \langle u,u\rangle = 0, \text{当且仅当} u=0 \end{cases}$$

称为复的预希尔伯特空间，上面记号〈,〉为内积运算。

2. 巴拿赫（Banach）空间

一个线性空间，在其上面赋予下面的范数定义

$$\begin{cases} 1.\ \text{非负性} & \|u\| \ge 0, \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0 \\ 2.\ \text{三角不等式} & \|u+v\| \le \|u\| + \|v\| \\ 3.\ \text{齐次性} & \|au\| = \|a\|\cdot\|u\| \end{cases}$$

这个线性空间称为赋范线性空间。

一个赋范线性空间如果是完备的，称为巴拿赫空间。

3. 希尔伯特空间

一个预希尔伯特空间 H，在其中定义内积为范数，即 $\|v\| = \langle u,u\rangle^{1/2}$，$H$ 成为一个赋范空间，若该赋范空间是完备的，则称为希尔伯特空间。

希尔伯特空间具有优良的性质，正交性是其中最重要的性质之一。

正交投影：

设 V 是希尔伯特空间 H 的一个闭子空间，其正交补空间为 W，那么对任意 $u \in H$，则 u 有唯一分解

$$u=v+w$$

其中，$v\in V, w\in W$。v 为 u 在闭子空间 V 上的投影，w 为 u 在子空间 W 上的投影。采用平面坐标就很易理解上述正交定理：把二维平面理解为 H 空间，其中 x 坐标轴为 V 子空间，y 坐标轴为正交补空间 W。那末平面上任一个向量 $\vec{u}$，都能分解为 x 轴上的投影和 y 轴上的投影。

二、框架概念

框架概念是 R.I. Duffin 和 A.G. Schaeffer 在 1952 年提出的，它是对规范正交基概念的推广。下面仅给出框架理论中的有关结果。

1. **框架定义**

在希尔伯特空间 H 中一族函数 $\{\psi_k\}_{k\in K}$ 称为一个框架，如果存在 $0<A<B<\infty$，对于所有 $f\in H$，有

$$A\|f\|^2 \le \sum_k \left|\langle f,\psi_k\rangle\right|^2 \le B\|f\|^2 \tag{4.1}$$

称 $\{\psi_k\}$ 是 H 中的一个框架。A、B 称为框架界。

常数 $B<\infty$ 保证了变换 $f\to\{\langle f,\psi_k\rangle\}$ 是连续的，常数 $A>0$ 保证了变换是可逆的。若 $A=B$，则称为紧致框架（Tight Frame）。如果 $A=B=1$，则

$$\sum_k \left|\langle f,\psi_k\rangle\right|^2 = \|f\|^2$$

这时，$\{\psi_k\}$ 为正交框架，若 $\|\psi_k\|=1$，则 $\{\psi_k\}$ 为规范正交基。

为了理解框架概念，用二维平面空间为例来讨论。二维平面里一般采用直角坐标 x 轴和 y 轴来刻划平面中任意向量 $\vec{u}$，向量 $\vec{u}$ 在 x 轴投影为 u_x，在 y 轴投影为 u_y，那么有

$$u_x^2 + u_y^2 = \|u\|^2$$

二维平面里的规范正交基为 e_x 和 e_y。如果我们采用三个相互成 120° 角的三个基 $\{e_1,e_2,e_3\}$ 来刻划平面中的任意向量 $\vec{u}(u_x,u_y)$（图 4.1），则有

$$\sum_{k=1}^{3}\left|\langle u,e_k\rangle\right| = \left|u_y\right|^2 + \left|-\frac{\sqrt{3}}{2}u_x - \frac{1}{2}u_y\right|^2 + \left|\frac{\sqrt{3}}{2}u_x - \frac{1}{2}u_y\right|^2$$

$$= \frac{3}{2}(u_x^2+u_y^2) = \frac{3}{2}\|u\|^2$$

上面例子中的 $\{e_1,e_2,e_3\}$ 就是框架，而且 $A\ne B$，e_k 之间不是正交的，且线性相关。

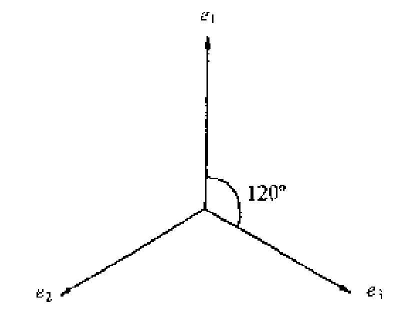


图 4.1　在 R^2 中向量冗余表示的原理示意

2. **框架算子的定义**

在希尔伯特空间 H 中，框架算子 S 定义为

$$Sf = \sum_k \langle f, \psi_k \rangle \psi_k$$

框架算子 S 有下述性质：

（1）有界性：即 $AI \le S \le BI$

（2）可逆性：即 $B^{-1}I \le S^{-1} \le A^{-1}I$

其中，I 为恒等算子。$If=f$。

3. **对偶框架的定义**

定义
$$\tilde{\psi}_k = S^{-1}\psi_k$$

称 $\{\tilde{\psi}_k\}$ 为 $\{\psi_k\}$ 的对偶框架，其框架界为 B^{-1} 和 A^{-1}。

4. **重构定理**

令 $f \in H$，$\{\psi_k\}$ 是 H 的一个框架，$\{\tilde{\psi}_k\}$ 为其对偶框架，则对 f 有下述重构公式：

$$f = \sum_k \langle f, \tilde{\psi}_k \rangle \psi_k = \sum_k \langle f, \psi_k \rangle \tilde{\psi}_k \tag{4.2}$$

容易看出，式(4.2)是规范正交基展开公式的推广。

当 $\{\psi_k\}$ 是紧致框架时，$S=AI$，$S^{-1} = A^{-1}I$，$\{\tilde{\psi}_k\} = S^{-1}\psi_k = A^{-1}\psi_k$，所以重构公式为

$$f = A^{-1}\sum_k \langle f, \psi_k \rangle \psi_k$$

当 $A=B=1$ 时，重构公式为

$$f = \sum_k \langle f, \psi_k \rangle \psi_k \tag{4.3}$$

这时，$\{\psi_k\}$ 是两两正交的，特别是 $\|\psi_k\| = 1$ 时，$\{\psi_k\}$ 就是 H 空间中的规范正交基。这说明框架是规范正交基概念的推广。一般情况下，它们并不是正交基，存在冗余性。

作为巴什瓦公式的推广，对框架有下面公式：

$$\begin{aligned}\langle f, g \rangle &= \sum_k \langle f, \tilde{\psi}_k \rangle \langle \psi_k, g \rangle \\ &= \sum_k \langle f, \psi_k \rangle \langle \tilde{\psi}_k, g \rangle\end{aligned}$$

§4.2 离散小波变换

信号 $f(t)$ 的连续小波变换为

$$\mathrm{CWT}_{a,b} = \int_R f(t)\psi_{a,b}(t)\mathrm{d}t$$

对尺度因子 a 和平移参数 b 进行如下的离散采样：

$$a = a_0^m \qquad a_0 > 0, m \in Z$$

$$b = nb_0 a_0^m \qquad b \in R, n \in Z$$

则小波 $\psi_{a,b}(t)$ 变为

$$\psi_{m,n}(t) = a_0^{-m/2}\left(a_0^{-m}t - nb_0\right)$$

离散小波变换定义为

$$\mathrm{DWT}_{a,b} = \int_R f(t)\psi_{m,n}(t)\mathrm{d}t \tag{4.4}$$

写成内积形式有

$$\mathrm{DWT}_{a,b} = \left\langle f(t), \psi_{m,n}(t)\right\rangle \qquad m, n \in Z$$

对于离散小波变换给出如下三点说明：

（1）等 Q 结构离散化。

由于基本小波的等 Q 性质，对参数也做等 Q 结构离散化，即 a 增大时，a 的间隔也增大，所以取 $a = a_0^m$。同样地，a 增大时，a 延迟时间也增大，故取 b 为 $a_0^m b_0$ 的整数倍，即 $b = na_0^m b_0$。参数离散化的小波为

$$\psi_{m,n} = a_0^{-m/2}\psi(a_0^{-m}t - nb_0)$$

时间采样 Δt 为 $a_0^m b_0$，图 4.2 表示采样点随 a 增大的变化。

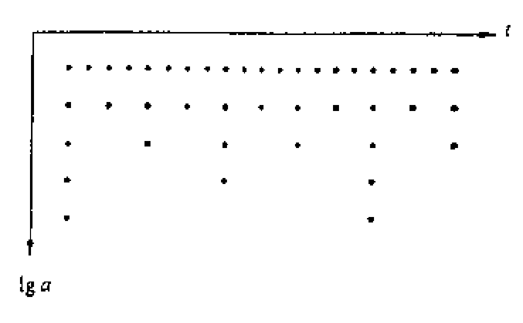


图 4.2　样点随尺度指标 a 变化示意

（2）离散小波变换实际上仍然是一系列带通滤波器，只是带通滤波器的中心频率和带宽由于 a 的离散采样而成为一系列的离散值。但是仍然保持恒 Q 性质。滤波后的输出也因 b 的离散采样而成为离散值。

（3）离散小波变换的重构。

根据前述框架理论结果，当 $\{\psi_{m,n}\}$ 为 $L^2(R)$ 的框架时，可由离散小波变换 $\mathrm{DWT}_{m,n}$ 恢复出原信号 $f(t)$，其重构公式为

$$f(t) = \sum_{m,n} \mathrm{DWT}_{m,n}\tilde{\psi}_{m,n}(t) \tag{4.5}$$

$\tilde{\psi}_{m,n}(t)$ 为 $\psi_{m,n}(t)$ 的对偶框架，而

$$\mathrm{DWT}_{m,n}=\int_R f(t)\psi_{m,n}(t)\mathrm{d}t$$

（4）离散小波的冗余性。

离散小波框架$\{\psi_{m,n}(t)\}$存在冗余性，所以离散小波变换是冗余变换。但是当框架界$A=B=1$时，$\{\psi_{m,n}(t)\}$就成了$L^2(R)$中的正交基。这时，信号$f(t)$的离散小波变换相当于正交分解，称为正交离散小波变换，它是无冗余变换。

§4.3 二进小波变换

在离散小波变换中，一种方便的离散方法是取$a_0=2$，所得到的小波和小波变换称为二进小波和二进小波变换。如果再取$b_0=1$，称其为二进正交小波和二进正交小波变换。

一、二进小波变换

设$\psi(t)\in L^2(R)$，若存在常数A和B，$0<A\le B<\infty$，使得

$$A<\sum_k\left|\Psi(2^k\omega)\right|^2\le B \tag{4.6}$$

则称$\psi(t)$为二进小波。条件（4.6）称为稳定条件。若$A=B$，则称为最稳定条件。二进小波是容许小波。现证明如下：

（1）当$\omega\in R^+$时，式（4.6）两边各乘以$\frac{1}{\omega}$，并且在区间[1，2]上积分，则

$$A\int_1^2\frac{1}{\omega}\mathrm{d}\omega\le\sum_k\int_1^2\frac{\left|\Psi(2^k\omega)\right|^2}{\omega}\mathrm{d}\omega\le B\int_1^2\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega}$$

因

$$\int_1^2\frac{\left|\Psi(2^k\omega)\right|^2}{\omega}\mathrm{d}\omega\overset{2^k\omega=z}{=\!=\!=}\int_{2^k}^{2^{k+1}}\frac{\left|\Psi(z)\right|^2}{z}\mathrm{d}z=\int_{2^k}^{2^{k+1}}\frac{\left|\Psi(\omega)\right|^2}{\omega}\mathrm{d}\omega$$

所以

$$A\ln 2\le\int_{R^+}\frac{\left|\Psi(\omega)\right|^2}{\omega}\mathrm{d}\omega\le B\ln 2 \tag{4.7}$$

（2）当$\omega\in R^-$时，同样可证：

$$A\ln 2\le\int_{R^-}\frac{\left|\Psi(\omega)\right|^2}{\omega}\mathrm{d}\omega\le B\ln 2 \tag{4.8}$$

因此有

$$A\ln 2\le\int_R\frac{\left|\Psi(\omega)\right|^2}{\omega}\mathrm{d}\omega\le B\ln 2$$

这就证明了二进小波是容许小波。

对二进小波$\{\psi_{2^k}(t)=2^{-k}\psi(2^{-k}t)\}$、$f(t)\in L^2(R)$的二进小波变换定义为

$$\mathrm{DWT}_{2^k}=2^{-k}\int_R f(t)\overline{\psi\left(\frac{t-b}{2^k}\right)}\mathrm{d}t \tag{4.9}$$

像证明式（3.23）一样，很易证明DWT_{2^k}的傅里叶变换为

$$\mathrm{DWT}_{2^k}=F(\omega)\overline{\Psi(2^k\omega)} \tag{4.10}$$

利用式（4.10）和式（4.6）有：

$$A\|F(\omega)\|^2\le\sum_k\left\|\mathrm{DWT}_{2^k}(\omega)\right\|^2\le B\|F(\omega)\|^2 \tag{4.11}$$

式（4.11）表明二进小波是框架。根据框架理论结果，二进小波变换DWT_{2^k}可重构$f(t)$。由框架重构公式知道，需要给出重构小波，为此定义下述方程：

$$\sum_k\Psi(2^k\omega)\chi(2^k\omega)=1 \tag{4.12}$$

式中，$\chi(t)$为重构小波，但它不是唯一的重构小波。例如取$\chi(\omega)$为

$$\chi(\omega)=\frac{\overline{\Psi(\omega)}}{\sum_k\left|\Psi(2^k\omega)\right|^2}$$

很易证明$\chi(\omega)$满足式（4.12）。因为

$$\sum_l\Psi(2^l\omega)\chi(2^l\omega)=\sum_l\Psi(2^l\omega)\frac{\overline{\Psi(2^l\omega)}}{\sum_k\left|\Psi(2^{l+k}\omega)\right|^2}$$

$$=\frac{\sum_l\left|\Psi(2^l\omega)\right|^2}{\sum_l\sum_k\left|\Psi(2^{l+k}\omega)\right|^2}=\frac{\sum_l\left|\Psi(2^l\omega)\right|^2}{\sum_p\left|\Psi(2^p\omega)\right|^2}=1$$

二进小波的重构公式为

$$f(t)=\int_R\left\{\sum_k\mathrm{DWT}_{2^k}(b)\cdot2^{-k}\cdot\chi\left[2^{-k}(t-b)\right]\right\}\mathrm{d}b \tag{4.13}$$

证明：因为

$$\int_R\left\{\sum_k\mathrm{DWT}_{2^k}(b)\cdot2^{-k}\cdot\chi\left[2^{-k}(t-b)\right]\right\}\mathrm{d}b$$

$$=\sum_k2^{-k}\int_R\mathrm{DWT}_{2^k}(b)\chi[2^{-k}(t-b)]\mathrm{d}b$$

(利用巴什瓦等式)

$$=\sum_k\frac{1}{2\pi}\int_R\mathrm{DWT}_{2^k}(\omega)\chi(2^k\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\sum_k\frac{1}{2\pi}\int_R F(\omega)\Psi(2^k\omega)\cdot\frac{\overline{\Psi(2^k\omega)}}{\sum_k\left|\Psi(2^k\omega)\right|^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_R F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega=f(t)$$

$\chi(t)$ 也是一个二进小波，且

$$\frac{1}{B} \le \sum_k \left|\chi(2^k \omega)\right|^2 \le \frac{1}{A}$$

由于二进小波仅对尺度因子进行二进离散化 $a = 2^k$，对时间域的平移参数 b 仍保持连续，所以二进小波变换仍然保持对时间 b 的连续取值。

二、二进正交小波变换

设 $\psi(t) \in L^2(R)$，且满足

$$\sum_k \left|\Psi(2^k \omega)\right|^2 = 1 \qquad (4.14)$$

$\psi(t)$ 为二进正交小波。尺度因子和平移参数按二进制离散，$a_0 = 2, b_0 = 1$，二进正交小波为

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{-k/2}\psi(2^{-k}t - n) \qquad (4.15)$$

在后面的多分辨率分析中将详细讨论二进正交小波。

说明：

（1）在尺度因子和平移参数离散化过程中，有很多作者采用 $a = 2^{-k}$，这种离散化的直观性是 k 取值大对应着高频，k 取值小对应着低频。但在实际资料处理时，是从最高频率（由耐奎斯特频率确定）向低频分解。所以采用 $a = 2^k$ 更方便。$k = 0$ 时为信号的采样频率，$k = 1$ 时将频率二等分，依此进行下去。所以本书采用 $a = 2^k$。

（2）至此可将小波变换分类为

小波变换
- 连续小波变换(CWT)
- 离散小波变换(DWT)
  - 小波框架(冗余性)
  - 正交小波
- 小波包变换(后面介绍)

第五章　多分辨率分析

多分辨率分析概念是由 S. Mallat 和 Y. Meyer 于 1986 年提出的，它可将在此之前所有正交小波基的构造统一起来，使小波理论产生突破性进展。同时，在多分辨率理论分析基础上，S. Mallat 给出了快速二进小波变换算法，称为马拉（Mallat）算法，这一算法在小波分析中的地位很重要，相当于快速傅里叶算法（FFT）在经典傅里叶分析中的地位。

§5.1　康托尔（Cantor）间断集

为了介绍小波变换中的多分辨率分析（Multiresolution Analysis, MRA），采用康托尔集的直观方法，引入多分辨率分析的思想。

一、康托尔间断集

设 $x_0=[0,1]$，则 x_0 是一个长度等于 1 的闭区间。现在将单位长度三等分，去掉中间长度为 1/3 的开区间（1/3，2/3），剩下的是左、右各 1/3 长度的闭区间，用 x_1 表示，则 $x_1=[0,1/3]\cup[2/3,1]$，接着再把 x_1 中两个长度各为 1/3 的区间三等分，去掉中间的 1/3 部分，其长度为$1/3^2$的开区间，剩下的是 x_2，则有

$$x_2=[0,1/3^2]\cup[2/3^2,3/3^2]\cup[6/3^2,7/3^2]\cup[8/3^2,1]$$

它是由 2^2 个长度等于$1/3^2$的闭区间所构成，如图 5.1 所示。由此继续分割下去，就得到一个无穷嵌套序列 $X_0\supset X_1\supset X_2\supset X_3\supset\cdots$，其中 X_k 是由 2^k 个长度为$1/3^k$ 的闭区间所组成，这些集的交集用 D 记之，则 $D=X_0\cap X_1\cap X_2\cap X_3\cap\cdots=\bigcap\limits_{k=0}^{\infty}X_k$，这就是康托尔间断集。因为 X_k 是由 2^k 个长度等于$1/3^k$ 的闭区间所组成，它的总长度等于 $2^k/3^k$。所以 D 若是有长度（测度）的话，其长度等于如下极限：

$$\lim_{k\to\infty}2^k/3^k=\lim_{k\to\infty}(2/3)^k=0$$

与闭区间同时存在的是开区间，记为$W_1,W_2,\cdots$。不难看出，康托尔间断集中任意两个不同的开区间的交集是空集ϕ，说明它们是相互正交的，即

$$W_1\cap W_2\cap W_3\cap\cdots\cap W_N=\bigcap_{k=1}^{N}W_k=\{0\}$$

为了方便，称下标k为康托尔间断集的尺度。

二、康托尔间断集与希尔伯特空间的对应关系

由图 5.1 很易将康托尔间断集与希尔伯特空间 H 联系起来，不难建立二者之间的对应关系。为此用 H 空间的子空间V_0表示康托尔间断集中的 X_0。每次去掉的部分用子空间W_k记之，而每次剩余的部分用子空间V_k表示。显然，任意两个不同的开区间 W_i 与 W_j 的交集是ϕ，意味着它们彼此正交。同时V_i 与 V_j 的交集并不是ϕ，因此V_i 与V_j 并不正交，在尺度为 1 时，V_0

分解为V_1与W_1的直和，即$V_0 = V_1 \oplus W_1$，W_1就是V_1在V_0中的正交补空间，改变尺度继续分割下去就有$V_0 = V_1 \oplus W_1 = V_2 \oplus W_2 \oplus W_1 = \cdots$，可见，$W_i$就是对$V_0$空间结构的细节补充。同时$V_i$就是在尺度$i$下对$V_0$的基本特性的表征。

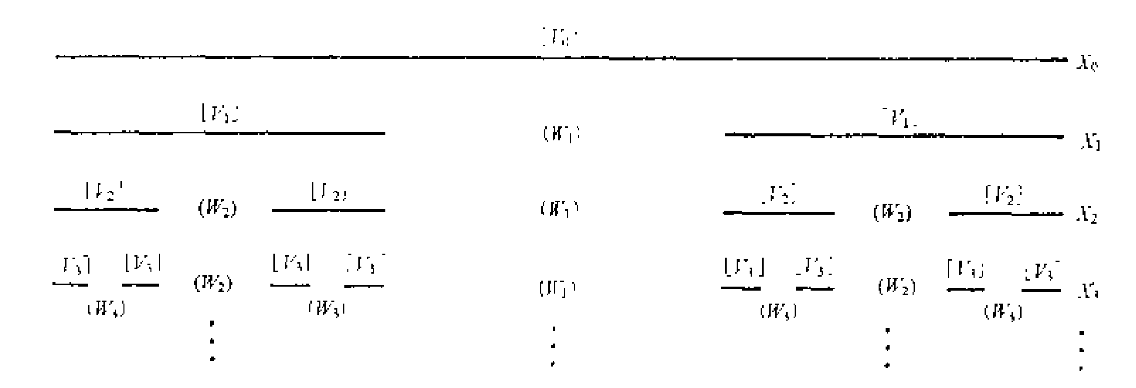


图 5.1 康托尔间断集与希尔伯特空间的关系

三、康托尔间断集的性质

由图 5.1 可以直观地看出，康托尔间断集有如下的性质：

1. $X_m \in X_{m-1}$：即分辨率高的空间X_{m-1}包含了分辨率低的空间X_m的全部信息。

2. $\bigcup\limits_{m=-\infty}^{0} X_m = X_0$，$\bigcap\limits_{m=-\infty}^{0} X_m = \{0\}$，即$\lim\limits_{m\to\infty} X_m = 0$。

3. 如果$f(t) \in X_m$，则$f(2t) \in X_{m-1}$。

4. 若$f(t) \in X_m$，则$f(t - K/2^m) \in X_m$，即康托尔间断集对于函数$f(t)$的平移是不变的。

§5.2 多分辨率分析

多分辨率分析的实质是满足一定条件$L^2(R)$中的一系列子空间，其定义如下：

在$L^2(R)$空间中的多分辨率分析是指满足下列条件的一空间序列$\{V_j, j \in Z\}$：

（1）单调性：$V_j \subset V_{j-1}, j \in Z$；

（2）渐进完全性：$\bigcup\limits_{j=-\infty}^{\infty} V_j \in L^2(R), \bigcap\limits_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}$；

（3）伸缩性：对任意$j \in Z, f(x) \in V_j$，则$f(2x) \in V_{j-1}$；

（4）平移不变性：$f(x) \in V_j$，则$f(x - 2^j k) \in V_j, k \in Z$；

（5）里兹（Riesz）基存在性：存在函数$g(x) \in V_0$，使得$\{g(x-k),\ k \in Z\}$构成V_0的里兹基，即对任意的$\varphi(x) \in V_0$，存在唯一的序列$a_k \in l^2$，使得$\varphi(x) = \sum\limits_k a_k g(x-k)$。

在离散小波变换一章里介绍了离散小波、二进小波和二进正交小波，特别是二进正交小波$\psi_{m,n}(t)$构成了$L^2(R)$空间的一个正交基，但是没有介绍这种二进正交小波是如何构造出来的。而多分辨率分析是满足上述五个条件的$L^2(R)$空间的子空间序列。所以两者在理论上存在着对应关系。下面来研究如何从多分辨率分析理论出发导出$L^2(R)$空间的二进正交小波函数。

一、$V_j(j\in Z)$空间的标准正交基（尺度函数的引入）

由里兹基的存在性，设$\varphi(x)\in V_0$，则

$$\varphi(x)=\sum_k a_k g(x-k) \tag{5.1}$$

其傅里叶变换为

$$\Phi(\omega)=G(\omega)\sum_{k\in Z}a_k \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega}=G(\omega)M(\omega) \tag{5.2}$$

式中

$$M(\omega)=\sum_{k\in Z}a_k \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega}$$

由于$M(\omega+2l\pi)=M(\omega),\ l\in Z$，故

$$\Phi(\omega+2l\pi)=G(\omega+2l\pi)M(\omega+2l\pi)=M(\omega)G(\omega+2l\pi) \tag{5.3}$$

根据正交性条件，只有

$$\sum_{l\in Z}\left|\Phi(\omega+2l\pi)\right|^2=1 \tag{5.4}$$

成立时，$\{\varphi(x-k),k\in Z\}$才构成V_0空间的标准正交基。由式（5.3），

$$\sum_{l\in Z}\left|\Phi(\omega+2l\pi)\right|^2=\left|M(\omega)\right|^2\sum_{l\in Z}\left|G(\omega+2l\pi)\right|^2$$

由上式可见，当

$$\left|M(\omega)\right|^2=\frac{1}{\sum_{l\in Z}\left|G(\omega+2l\pi)\right|^2}$$

时，式（5.4）成立。因此，由式（5.2），

$$\Phi(\omega)=\frac{G(\omega)}{\left[\sum_{l\in Z}\left|G(\omega+2l\pi)\right|^2\right]^{1/2}} \tag{5.5}$$

由式（5.5）得到的$\{\varphi(x-k),k\in Z\}$就形成了V_0的标准正交基。

在多分辨率分析中，称$\varphi(x)$为尺度函数。由多分辨率分析的性质（3），可以得出V_j空间的标准正交基为$2^{-j/2}\varphi(2^{-j}x-n),n\in Z$。

这里引进了尺度函数$\varphi(x)$。尺度函数$\varphi(x)$与小波$\psi(x)$在小波变换中起着重要作用，尺度函数是构造小波的重要途径。

二、V_j 的正交补空间 W_j 的标准正交基

由多分辨率分析定义知道：$V_j \subset V_{j-1}$；而由泛函空间中的正交分解理论有 $V_{j-1} = V_j \oplus V_j^{\perp}$，其中 $V_j^{\perp}$ 表示该空间中所有元素与 V_j 中的任一元素均正交。现记 $V_j^{\perp}$ 为 W_j，即 V_j 的正交补空间。

若 $\psi(x) \in W_0$，则 $\{\psi(x-n), n \in Z\}$ 可构成 W_0 空间的标准正交基，而由多分辨率分析的伸缩性，W_j 空间的标准正交基为 $2^{-j/2}\psi(2^{-j}x-n), n \in Z$。

三、$L^2(R)$ 空间的标准正交基

根据 $L^2(R) = \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j$ 及 $V_{j-1} = V_j \oplus W_j^{\perp}$，最后可得

$$L^2(R) = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j$$

上式表明，$L^2(R)$ 是由无穷个正交补空间的直和构成的，而 $L^2(R)$ 的正交基就是把直和的子空间的正交基和并起来得到的。这样，$L^2(R)$ 空间的标准正交基为

$$2^{-j/2}\psi(2^{-j}x-n), \quad j \in Z, n \in Z \tag{5.6}$$

以上给出了 V_j 空间、W_j 空间及 $L^2(R)$ 空间的标准正交基的形式。

在二进正交小波变换一节中已给出二进正交小波函数的形式为

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{-m/2}\psi(2^{-m}t-n)$$

与式（5.6）相比较，两者形式完全一样。所以式（5.6）是从多分辨率分析理论导出的二进正交小波函数。

四、尺度函数 $\varphi(x)$ 的两尺度方程和 $H(\omega)$ 的性质

前面得到尺度函数

$$\varphi_{j,n}(x) = 2^{-j/2}\varphi(2^{-j}x-n) \qquad j,n \in Z$$

当 $j=0$ 和 1 时有

$$\varphi_{0,n} = \varphi(x-n) \qquad \in V_0$$

$$\varphi_{1,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(\frac{x}{2}) \qquad \in V_1$$

但 $V_1 \in V_0$，所以可以用 $\varphi_{0,n}$ 展开 $\varphi_{1,0}$，即

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(\frac{x}{2}) = \sum_n h_n \varphi(x-n) \tag{5.7}$$

其中
$$h_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_R \varphi(\frac{x}{2})\overline{\varphi(x-k)}\mathrm{d}x = \langle \varphi_{1,0}, \varphi_{0,n} \rangle$$

式（5.7）称为尺度函数的两尺度差分方程。将式（5.7）两边取傅里叶变换，

$$\Phi(2\omega) = H(\omega)\Phi(\omega) \tag{5.7'}$$

其中 $H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n h_n e^{-i\omega n}$ 称为序列 $\{h_n\}$ 的傅里叶变换。序列 $\{h_n\}$ 或者与之等价的 $H(\omega)$

完全决定了多分辨率分析。

$H(\omega)$ 的性质：由于 $\{h_n\}$ 和 $H(\omega)$ 是一个给定的多分辨率分析的频率响应和传递函数，因此，

（1）
$$|H(\omega)|^2+|H(\omega+\pi)|^2=1 \tag{5.8}$$

（2）若 $\{h\}\in l^1$（可和数列空间），且 $\Phi(\omega)$ 连续，$\Phi(0)\neq 0$，则

$$H(0)=1 \tag{5.9}$$

证明：因 $\{\varphi(x-n)/n\in Z\}$ 构成空间 V_0 的规范正交基，所以

$$\sum_k|\Phi(\omega+2n\pi)|^2=1 \tag{5.10}$$

由式（5.7′）得到

$$\Phi(\omega)=H\left(\frac{\omega}{2}\right)\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{5.11}$$

将式（5.11）代入式（5.10），则

$$\sum_n\left|H\left(\frac{\omega}{2}+n\pi\right)\right|^2\left|\Phi\left(\frac{\omega}{2}+n\pi\right)\right|^2=1 \tag{5.12}$$

将上式中的求和指标分为奇偶两组分别求和，再考虑函数 $H(\omega)$ 的 2π 周期性，则

$$1=\sum_n|H(\omega+2n\pi)|^2|\Phi(\omega+2n\pi)|^2+\sum_n\left|H[\omega+(2n+1)\pi]\right|^2\left|\Phi[\omega+(2n+1)\pi]\right|^2$$

$$=\sum_n|H(\omega)|^2|\Phi(\omega+2n\pi)|^2+\sum_n|H(\omega+\pi)|^2|\Phi(\omega+\pi+2n\pi)|^2$$

（在后一部分中令 $\omega'=\omega+\pi$）

$$=\sum_n|H(\omega)|^2|\Phi(\omega+2n\pi)|^2+\sum_n|H(\omega')|^2|\Phi(\omega'+2n\pi)|^2$$

$$=|H(\omega)|^2\sum_n|\Phi(\omega+2n\pi)|^2+|H(\omega')|^2\sum_n|\Phi(\omega'+2n\pi)|^2$$

$$=|H(\omega)|^2+|H(\omega')|^2=|H(\omega)|^2+|H(\omega+\pi)|^2$$

$H(\omega)$ 的性质（1）证毕。

现证性质（2）：

因为 $\{h_n\}\in l^1$，所以 $H(\omega)$ 连续。由于假设 $\Phi(0)\neq 0$，由式（5.7′）立即得到 $H(0)=1$。

五、二进正交小波 $\psi(x)$ 的两尺度方程和 $G(\omega)$ 的性质

式（5.6）已给出二进正交小波为

$$\psi_{m,n}(x)=2^{-m/2}\psi(2^{-m}x-n),\quad m,n\in Z$$

因为$V_1\oplus W_1=V_0$，所以可以用$\varphi_{0,n}$展开$\psi_{1,0}$，即

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\psi(\frac{1}{2}x)=\sum_n g_n\varphi(x-n) \tag{5.13}$$

其中

$$g_n=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_R\psi\left(\frac{x}{2}\right)\overline{\varphi(x-k)}\mathrm{d}x=\left\langle\psi_{1,0},\phi_{0,n}\right\rangle$$

有时称式（5.13）为$\psi(x)$的两尺度方程。

对式（5.13）两边取傅里叶变换，

$$\Psi(2\omega)=G(\omega)\Phi(\omega) \tag{5.14}$$

其中

$$G(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n g_n\mathrm{e}^{-in\omega} \tag{5.15}$$

$G(\omega)$的性质：$\{g_n\}$和$G(\omega)$是由$\varphi(x)$求二进正交小波的重要途径。$H(\omega)$具有下述性质：

（1）

$$H(\omega)\overline{G(\omega)}+H(\omega+\pi)\overline{G(\omega+\pi)}=0 \tag{5.16}$$

（2）

$$|G(\omega)|^2+|G(\omega+\pi)|^2=1 \tag{5.17}$$

证明：因为$\psi(x)\in W_0,\varphi(x)\in V_0$，而$V_0\perp W_0$，所以

$$\int_R\psi(x)\overline{\varphi(x-n)}\mathrm{d}x=0 \tag{5.18}$$

采用巴什瓦公式，利用式（5.7）和式（5.14），则

$$\begin{aligned}\int_R\psi(x)\overline{\varphi(x-n)}\mathrm{d}x&=\frac{1}{2\pi}\int_R\Psi(\omega)\overline{\Phi(\omega)}\cdot\mathrm{e}^{in\omega}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_R G\left(\frac{\omega}{2}\right)\overline{H\left(\frac{\omega}{2}\right)}\left|\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2\mathrm{e}^{in\omega}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_k G\left(\frac{\omega}{2}+k\pi\right)\overline{H\left(\frac{\omega}{2}+k\pi\right)}\left|\Phi\left(\frac{\omega}{2}+k\pi\right)\right|^2\mathrm{e}^{in\omega}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[G\left(\frac{\omega}{2}\right)\overline{H\left(\frac{\omega}{2}\right)}+G\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\overline{H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}\right]\mathrm{e}^{in\omega}\mathrm{d}\omega\end{aligned}$$

像证明$H(\omega)$性质一样，上面利用了奇偶分组和正交性条件，得到最后的式子。要使最后的式子对任何$\mathrm{e}^{in\omega}$积分等于零，只有

$$G\left(\frac{\omega}{2}\right)\overline{H\left(\frac{\omega}{2}\right)}+G\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\overline{H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}=0$$

即

$$H(\omega)\overline{G(\omega)}+H(\omega+\pi)\overline{G(\omega+\pi)}=0$$

性质（1）证毕。

$G(\omega)$性质的证明（2）与$H(\omega)$的性质证明相同，不再重复。

六、$\{g_n\}$和$\{h_n\}$的关系

前面已证明

$$\begin{cases} H(\omega)\overline{G(\omega)}+H(\omega+\pi)\overline{G(\omega+\pi)}=0 \\ |G(\omega)|^2+|G(\omega+\pi)|^2=1 \end{cases}$$

很易证明$G(\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\overline{H(\omega+\pi)}$满足上面两个式子，所以是它们的解。因此由$G(\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\overline{H(\omega+\pi)}$可以求出$\{g_n\}$与$\{h_n\}$的关系。

$$\begin{aligned} G\left(\frac{\omega}{2}\right) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega/2}\overline{H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega/2}\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n \overline{h_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)} \\ &= \sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}}\overline{h_n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(1-n)\omega/2} = \sum_n \frac{(-1)^{1-n}}{\sqrt{2}}\overline{h_{1-n}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega n/2} \\ &= \sum_n \frac{1}{\sqrt{2}}g_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega/2} \end{aligned}$$

比较$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega/2}$的系数有

$$g_n=(-1)^{1-n}\overline{h_{1-n}} \qquad n\in Z \tag{5.18'}$$

通过前面的讨论，在多分辨率分析理论基础上导出了尺度函数、二进正交小波、两尺度方程，并得到$H(\omega)$和$G(\omega)$的如下性质：

（1）$|H(\omega)|^2+|H(\omega+\pi)|^2=1$；

（2）$|G(\omega)|^2+|G(\omega+\pi)|^2=1$；

（3）$H(\omega)\overline{G(\omega)}+H(\omega+\pi)\overline{G(\omega+\pi)}=0$；

（4）$G(\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}H^*(\omega+\pi)$。

上述性质是$H(\omega)$的构造尺度函数和小波函数的基础。因为$H(\omega)$是低通滤波器，所以$G(\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\overline{H(\omega+\pi)}$为高通滤波器。

七、信号$f(t)$的多分辨率分析

将V_j空间与W_j空间结合起来，就相当于希尔伯特空间H的正交分解，即

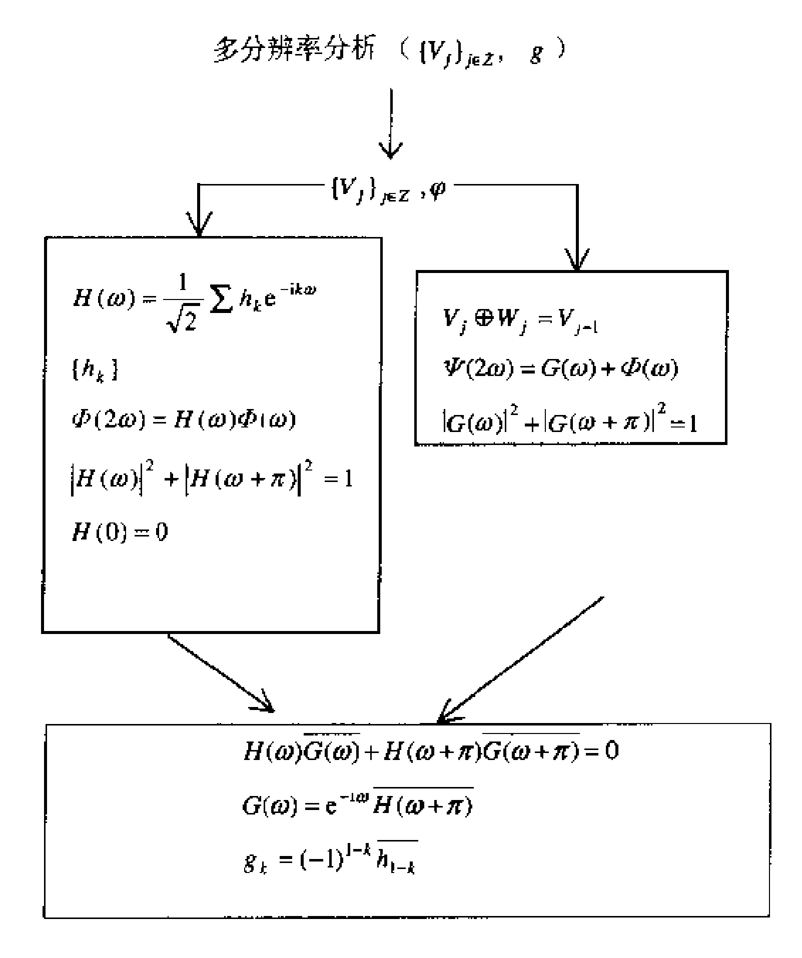
$$V_0=V_1\oplus W_1=V_2\oplus W_2\oplus W_1=V_3\oplus W_3\oplus W_2\oplus W_1=\cdots$$

实际测量的信号$f(x)$，只能得到有限的分辨率，假设对于尺度m_0，该尺度就对应着V_0，然后在W_k空间不断变换尺度进行越来越细的分解，用公式表示如下：

$$V_0 = V_1 \oplus W_1 = V_2 \oplus W_2 \oplus W_1 = V_3 \oplus W_3 \oplus W_2 \oplus W_1 = \cdots = V_N \bigcup_{k=1}^{N} W_k$$

$$f^0 = f^1 + d^1 = f^2 + d^2 + d^1 = f^3 + d^3 + d^2 + d^1 = \cdots = f^N + \sum_{k=1}^{N} d^k$$

小结：总结上述，从多分辨率分析出发，据里兹定理，由里兹基$\{g(x-k)/k \in Z\}$导出了规范正交基$\{\varphi(x-k)/k \in Z\}$，从而得到V_j空间的规范正交基$\{\varphi_{j,k}/k \in Z\}$，称$\varphi(x)$为尺度函数。进而由多分辨率分析的两尺度方程，推导出序列$\{h_k\}$和其相应的函数$H(\omega)$。定义V_j空间的正交补空间$W_j, W_j \oplus V_j = V_{j-1}$，由此给出了小波函数，小波函数的二进伸缩和平移$\{\psi_{j,k}/k \in Z\}$构成了$W_j$的规范正交基。从$\{\psi_{j,k}/j,k \in Z\}$构成了$L^2(R)$空间的规范正交基。上述结果简单表示如下：



§5.3 尺度函数$\varphi(x)$的求法

通过上节讨论可以看出，尺度函数与小波函数在小波变换中起着同样重要的作用。在多分辨率分析的基础上，由尺度函数构造小波函数是必经之路。但构造满意的尺度函数是很困难的，这是数学家的任务。下面仅简单介绍几种现有的构造尺度函数方法的思路。

一、频域迭代法

由式（5.7′）有

$$\Phi(\omega)=H\left(\frac{\omega}{2}\right)\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

不断递推下去有

$$\Phi(\omega)=\prod_{j=1}^{\infty}H(\omega/2^{j})\Phi(0)=\prod_{j=1}^{\infty}H(\omega/2^{j}) \tag{5.19}$$

上式中用了 $\Phi(0)=1$。求式（5.19）的逆傅里叶变换，可得到

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{j=1}^{\infty}H(\omega/2^{j})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega \tag{5.20}$$

上述方法思路很简单，但很难用数值方法求解。

二、时域迭代法

对于有限两尺度关系的尺度函数（即紧支撑尺度函数），两尺度关系可记为

$$\varphi(x)=\sqrt{2}\sum_{k=0}^{N}h_k\varphi(2x-k) \tag{5.21}$$

采用 $\varphi_0(x)=\chi_{[0,1]}(x)$（特征函数）作为初值进行迭代。

$$\varphi_m(x)=\sqrt{2}\sum_{k=0}^{N}h_k\varphi_{m-1}(2x-k)$$

当 $\varphi_m(x)=\varphi_{m-1}(x)$ 时，即为所求的 $\varphi(x)$。

这种方法遇到两个问题：其一是迭代的解不一定是方程的解；其二是采用不同的 $H(\omega/2^{j})$，迭代的结果相差很大。

三、解方程法

$\varphi(x)$ 为有限两尺度关系的尺度函数

$$\varphi(x)=\sqrt{2}\sum_{k=0}^{N}h_k\varphi_{m-1}(2x-k) \qquad h_0,h_N\neq 0$$

假定 $\varphi(k)$ 的解存在，且为有限长度，即除了 $\varphi(1),\varphi(2),\cdots,\varphi(N-1)$ 外，其它对所有 $k\leq 0$ 和 $k\geq N$ 的 $\varphi(k)=0$。为了求得 $\varphi(k)$ 的值，使用 x 为整数值（x=1，2，$\cdots,N-1$）时两尺度关系，得到矩阵方程

$$\boldsymbol{m}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{m} \tag{5.22}$$

其中，$\boldsymbol{m}$ 为列向量：

$$\boldsymbol{m}=\left(\varphi(1),\varphi(2),\cdots,\varphi(N-1)\right)^{\mathrm{T}}$$

M 为 $(N-1)\times(N-1)$ 矩阵：

$$M=[h_{2j-k}]_{1\le j,k\le N-1}$$

j 为行指标，k 为列指标。求解式（5.22）的特征向量 m，且要满足规范化条件

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\cdots+\varphi(N-1)=1$$

得到 $\Phi(k)$ 值后，利用下述关系

$$\begin{cases}\varphi\left(\dfrac{k}{2}\right)=\sqrt{2}\sum\limits_{l}h_l\varphi(k-l)\\ \varphi\left(\dfrac{k}{2^2}\right)=\sqrt{2}\sum\limits_{l}h_l\varphi\left(\dfrac{k}{2}-l\right)\\ \cdots\end{cases}$$

确定 $\varphi(x)$ 在 $x=k/2^j, j,k\in ZZ$ 的全部值。

四、Daubechies 方法

该方法是构造有限支撑规范正交尺度函数和小波的最好方法。由于涉及的数学理论较多，仅介绍其思路，详细内容请参考 I. Daubechies 的著作。

假设 $\{h_n\}$ 为有限序列，据前面结果有

$$\begin{cases}H(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sum\limits_{k=1}^{N}h_k e^{-ik\omega} & (5.23)\\ |H(\omega)|^2+|H(\omega+\pi)|^2=1 & (5.24)\\ H(0)=1 & (5.25)\end{cases}$$

（1）因为 $\{h_k\}$ 只有 N 个值，$h_k\in R$，且 $\omega=\pi$ 是 $H(\omega)=0$ 的 N 重根，所以 $H(\omega)$ 可写成下述形式：

$$H(\omega)=\left[\frac{1}{2}\left(1+e^{-i\omega}\right)\right]^N Q\left(e^{-i\omega}\right) \tag{5.26}$$

$Q\left(e^{-i\omega}\right)$ 是实系数多项式，由 $Q\left(e^{i\omega}\right)=\overline{Q\left(e^{-i\omega}\right)}$，得

$$\left|Q\left(e^{-i\omega}\right)\right|^2=Q\left(e^{-i\omega}\right)Q\left(e^{i\omega}\right)$$

因此，$\left|Q\left(e^{-i\omega}\right)\right|^2$能写成关于$\cos\omega$的多项式，当然也能写成关于$\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$或$\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$的多项式。若假设$y=\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$，则

$$\left|Q\left(e^{-i\omega}\right)\right|^2=P\left(\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)$$

同时注意到$\left|(1+e^{i\omega})/2\right|^2=\left|\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|$，由式（5.26）有

$$\left|H(\omega)\right|^2=\left[\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]^N\left|Q\left(e^{-i\omega}\right)\right|^2=(1-y)^N P(y)$$

$$\left|H(\omega+\pi)\right|^2=y^N P(1-y)$$

由式（5.24）得

$$y^N P(1-y)+(1-y)^N P(y)=1 \tag{5.27}$$

$$P(y)\geq 0 \qquad y\in[0,1] \tag{5.28}$$

（2）求解式（5.27）：

利用下面两个公式

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{n+1}{j}=\binom{n+k+1}{k}$$

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n+j}{j}\left[y^j(1-y)^{n+1}+y^{n+1}(1-y)^j\right]=1$$

可以得到满足式（5.27）的$N-1$次多项式：

$$P_N(y)=\sum_{j=0}^{N-1}\binom{N-1+j}{j}y^j \tag{5.29}$$

同时$P_N(y)$也满足式（5.28）。

由于前面假设$\left|Q\left(e^{-i\omega}\right)\right|^2=P\left(\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)$，所以可以设

$$\left|Q_N\left(e^{-i\omega}\right)\right|^2=P_N\left(\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right) \tag{5.30}$$

（3）求$Q(e^{-i\omega})$：

由式（5.26）看出，要求出$\{h_k\}$，必须知道$Q(e^{-i\omega})$。根据里兹定理，由式（5.30）可求得$Q(e^{-i\omega})$。

里兹定理：设M是一个非负的只含余弦的三角多项式$M(\omega)=\sum_{n=0}^{N}a_n\cos n\omega$，$(a_n\in R)$，那么存在一个三角多项式$m$，$m(\omega)=\sum_{n=0}^{N}b_n e^{-in\omega}$，$(b_n\in R)$，使之$\left|m(\omega)\right|^2=M(\omega)$。由式（5.27）、式（5.30）和里兹定理可得

$$\left|Q\left(e^{-i\omega}\right)\right|^2=\sum_{j=0}^{N-1}C_{N+j-1}^{j}\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right)^j+\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right)^N R\left(\frac{1}{2}-\sin^2\frac{\omega}{2}\right) \tag{5.31}$$

$R(x)$是奇次多项式，最简单情况下取$R(x)=0$。

由里兹定理求出$Q\left(e^{-i\omega}\right)$，代入式（5.26）就可求出$\{h_k\}$。

（4）求$\varphi(1),\cdots,\varphi(N)$：

采用解方程法求出$\varphi(k)$，再求得$\varphi\left(\frac{k}{2^j}\right)$。

由$g_n=(-1)^n h_{2N-n-1}$，$n=0,1,\cdots,2N-1$得到$\{g_k\}$。利用小波与尺度函数的两尺度关系，可求出$\psi\left(\frac{k}{2^j}\right)$。

表5.1给出了Daubechies小波的$N=2$到$N=10$的$h_N(n)$。

表5.1　Daubechies小波滤波器系数（低通滤波器），$\sum_N h_n=\sqrt{2}$

	n	$_N h_n$		n	$_N h_n$
$N=2$	0	0.4829629131445341	$N=5$	7	-0.0062414902127983
	1	0.8365163037378077		8	-0.0125807519990820
	2	0.2241438680420134		9	0.0033357252854738
	3	-0.1294095225512603	$N=6$	0	0.1115407433501095
$N=3$	0	0.3326705529500825		1	0.4946238903984533
	1	0.8060931109248915		2	0.7511339080210959
	2	0.4598775021184914		3	0.3152503517091982
	3	-0.1350110200102546		4	-0.2262646939654400
	4	-0.0854412738820267		5	-0.1297668675672625
	5	-0.0352262918857095		6	0.0975016055873225
$N=4$	0	0.2303778133088964		7	0.0275228655303053
	1	0.7148465705529154		8	-0.0315820393174862
	2	0.6308807679398587		9	0.0005538422011614
	3	-0.0279837694168599		10	0.0047772575109455
	4	-0.1870348117190931		11	-0.0010773010853085
	5	0.0308413818355607	$N=7$	0	0.0778520540850037
	6	0.0328830116668852		1	0.3965393194818912
	7	-0.0105974017850690		2	0.7291320908461957
$N=5$	0	0.1601023979741929		3	0.4697822874051889
	1	0.6038292697971895		4	-0.1439060039285212
	2	0.7243085284377726		5	-0.2240361849938412
	3	0.1384281459013203		6	0.0713092192668272
	4	-0.2422948870663823		7	0.0806126091510774
	5	-0.0322448695846381		8	-0.0380299369350104
	6	0.0775714938400459		9	-0.0165745416306655

续表

	n	$_Nh_n$		n	$_Nh_n$
N =7	10	0.0125509985560986	N =9	9	-0.0676328290613279
	11	0.0004295779729214		10	0.0002509471148340
	12	-0.0018016407040473		11	0.0223616621236798
	13	0.0003537137999745		12	-0.0047232047577518
N =8	0	0.0544158422431072		13	-0.0042815036824635
	1	0.3128715909143166		14	0.0018476468830563
	2	0.6756307362973195		15	0.0002303857635232
	3	0.5853546836542159		16	-0.0002519631889427
	4	-0.0158291052563823		17	0.0000393473203163
	5	-0.2840155429615824	N =10	0	0.0266700579005473
	6	0.0004724845739124		1	0.1881768000776347
	7	0.1287474266204893		2	0.5272011889315757
	8	-0.0173693010018090		3	0.6884590394534363
	9	-0.0440882539307971		4	0.2811723436605715
	10	0.0139810279174001		5	-0.2498464243271598
	11	0.0087460940474065		6	-0.1959462743772862
	12	-0.0048703529934520		7	0.1273693403357541
	13	-0.0003917403733770		8	0.0930573646035547
	14	0.0006754494064506		9	-0.0713941471663501
	15	-0.0001174767841248		10	-0.0294575368218399
N =9	0	0.0380779473638778		11	0.0332126740593612
	1	0.2438346746125858		12	0.0036065535669870
	2	0.6048231236900955		13	-0.0107331754833007
	3	0.6572880780512736		14	0.0013953517470688
	4	0.1331973858249883		15	0.0019924052951925
	5	-0.2932737832791663		16	-0.0006858566949564
	6	-0.0968407832229492		17	-0.0001164668551285
	7	0.1485407493381256		18	0.0000935886703202
	8	0.0307256814793385		19	-0.0000132642028945

第六章　二进正交小波变换的马拉（Mallat）算法

Mallat 在图像分解与重构的塔式算法启发下，根据多分辨率分析理论，提出了小波分解与重构的快速算法，称为马拉（Mallat）算法。该算法在小波变换中的地位就像 FFT（快速傅里叶变换）在傅里叶变换中的地位。

§6.1　滤波器脉冲系列$\{h_k\}$和$\{y_k\}$

第五章里已对 $j=1$ 的情况引进了脉冲系列$\{h_k\}$和$\{y_k\}$[见式（5.6）和（5.13）]。下面将对普遍情况进行讨论。

设$\{V_j\}_{j\in Z}$为$L^2(R)$的多分辨率逼近，由多分辨率理论有

$$\begin{cases}V_j \oplus W_j = V_{j-1} \\ V_j \in V_{j-1}, \qquad W_j \in V_{j-1}\end{cases} \tag{6.1}$$

$\varphi(x)$为尺度函数，令$\varphi_j(x)=2^{-j}\varphi(2^{-j}x)$，则

$$\varphi_{j,n}=2^{j/2}\varphi_j(x-2^j n)|_{n\in Z} \tag{6.2}$$

是V_j的规范正交基。将$\varphi_j(x)=2^{-j}\varphi(2^{-j}x)$代入式（6.2），$V_j$的规范正交基也可表示为

$$\varphi_{j,n}=2^{-j/2}\varphi_j(2^{-j}x-n)\Big|_{n\in Z} \tag{6.3}$$

$\psi(x)$为小波函数，令$\psi_j(x)=2^j\psi(2^{-j}x)$，则

$$\psi_{j,n}=2^{j/2}\psi_j(x-2^j n)\Big|_{n\in Z} \tag{6.4}$$

是W_j的规范正交基。将$\psi_j=2^{-j}\psi\ (2^{-j}x)$代入式（6.4），$W_j$的规范正交基也可表示为

$$\psi_{j,n}=2^{-j/2}\psi\ (2^j x-n)|_{n\in Z} \tag{6.5}$$

且

$$\begin{cases}2^{-j/2}\varphi(2^{-j}x)\in V_j \in V_{j-1} \\ 2^{-j/2}\psi(2^{-j}x)\in V_j \in V_{j-1}\end{cases} \tag{6.6}$$

根据式（6.6），可以用V_{j-1}空间的规范正交基表示V_j空间的基函数，即

$$2^{j/2}\varphi_j(x-2^j n)=\sum_k\left\langle 2^{j/2}\varphi_j(x-2^j n),\ \ 2^{j-1/2}\varphi_{j-1}(x-2^{j-1}k)\right\rangle\cdot 2^{j-1/2}\varphi_{j-1}(x-2^{j-1}k)$$

令 $j=1$，则由内积变成

$$\left\langle 2^{1/2}\varphi_1(x-2n),\ \ \varphi_0(x-k)\right\rangle \tag{6.7}$$

这正是式（5.7）中定义的h_k，不过现在是h_{k-2n}。

可以证明，对任意 j，上式均成立，所以有

$$2^{j/2}\varphi_j(x-2^j n)=\sum_k h_{k-2n}\cdot 2^{j-1/2}\varphi_{j-1}(x-2^{j-1}k) \tag{6.8}$$

将 $\varphi_j(x)=2^{-j}\varphi(2^{-j}x)$ 代入上式，就得到等价表示式

$$2^{-j/2}\varphi\ (2^{-j}x-n)=\sum_k h_{k-2n}\cdot 2^{-j-1/2}\varphi\ (2^{-(j-1)}x-k) \tag{6.9}$$

$$h_{k-2n}=\left\langle 2^{-j/2}\varphi_1(2^{-j}x-n),\ \ 2^{-j-1/2}\varphi\ (2^{-(j-1)}x-k)\right\rangle \tag{6.10}$$

完全相似地可以得到小波函数的如下关系：

$$2^{j/2}\psi_j(x-2^j n)=\sum_k g_{k-2n}\cdot 2^{-j-1/2}\varphi_{j-1}(x-2^{-(j-1)}k) \tag{6.11}$$

$$2^{-j/2}\psi\ (2^{-j}x-n)=\sum_k g_{k-2n}\cdot 2^{-j-1/2}\varphi\ (2^{-(j-1)}x-k) \tag{6.12}$$

$$g_{k-2n}=\left\langle 2^{-j/2}\psi(2^{-j}x-n),\ \ 2^{-j-1/2}\varphi\ (2^{-(j-1)}x-k)\right\rangle \tag{6.13}$$

脉冲系列 $\{h_k\}$ 和 $\{y_k\}$ 是马拉算法的基础。

§6.2 二进正交小波分解的物理意义

由于 $\psi_{j,n}(x)$ 为规范正交基，对不同的 j，$\psi_{j,n}(x)$ 是正交的。所以由不同的 j 所确定的频带是相互独立的。随着 j 的变化，这些相互独立的频带覆盖了整个频率轴，从频谱分析角度看，二进正交小波变换 $\mathrm{DWT}_{j,n}$ 是把信号分解到一系列相互独立的频带上，分辨率 j 反映了频带的位置和带宽。

在多分辨率分析理论中，$V_{j-1}=V_j\oplus W_j$，$\varphi_{j,n}(x)$ 是 V_j 空间的标准正交基，$\psi_{j,n}(x)$ 是 W_j 的标准正交基。信号 $f(x)$ 在 V_j 空间的正交投影 $D_j f(x)$，称为 $f(x)$ 在分辨率为 j 时的细节部分。显然，$A_{j-1}f(x)=A_j f(x)+D_j f(x)$，$A_{j-1}f(t)$ 为在分辨率 $j-1$ 时的近似信号，它是由分辨率为 j 时的近似部分与细节部分之和构成。

综上所述，对二进正交小波分解可表示如下：

（1）当分辨率为 j 时，W_j 空间的标准正交基为 $2^{-j/2}\psi(2^{-j}x-n)$、$n\in Z$，则

$$\begin{aligned}D_j f(x)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\langle f(u),2^{-j/2}\psi(2^{-j}u-n)\right\rangle 2^{-j/2}\psi(2^{-j}x-n)\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}d_n^j\cdot\psi_{j,n}(x)\end{aligned} \tag{6.14}$$

式中

$$d_n^j=\left\langle f(u),2^{-j/2}\psi(2^{-j}u-n)\right\rangle \tag{6.15}$$

$\psi_{j,n}=2^{j/2}\psi(2^j x-n)$ 是带通的，所以 $D_j f(x)$ 是由 j 所确定的带通频带对信号 $f(x)$ 的贡

献，提供 $f(x)$ 的细节，称为 $f(x)$ 在分辨率为 j 时的细节部分，而正交展开系数 d_n^j 称为离散细节。

（2）当分辨率为 j 时，V_j 空间的标准正交基为 $2^{-j/2}\varphi(2^{-j}x-n)$，$n\in Z$，则

$$
\begin{aligned}
A_j f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\langle f(u),2^{-j/2}\varphi(2^{-j}u-n)\right\rangle 2^{-j/2}\varphi(2^{-j}x-n) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^j\cdot\varphi_{j,n}(x)
\end{aligned}
\tag{6.16}
$$

式中

$$
a_n^j=\left\langle f(u),2^{-j/2}\varphi(2^{-j}u-n)\right\rangle \tag{6.17}
$$

它是相对 $\psi_{j,n}(x)$ 所确定带通频带的相邻低通频带对信号 $f(x)$ 的贡献，称为信号 $f(x)$ 在分辨率为 j 时的近似部分，而正交展开系数 a_n^j 称为离散近似。

（3）
$$
A_{j-1}f(x)=A_j f(x)+D_j f(x) \tag{6.18}
$$

它是由 j 所确定的带通频带与比其低且相邻的低通频带之和的一段低通频带对信号 $f(x)$ 的贡献，包含了信号的分辨率为 j 时的近似和细节。

可以用图 6.1 来说明式（6.18）的频带关系：

A_{j-1} 和 D_{j-1} 分别是分辨率为 $j-1$ 时的近似部分和细节部分的频带；而 A_j 和 D_j 分别是分辨率为 j 时的近似部分和细节部分频带。D_j 是 A_{j-1} 中的高频部分，A_j 是 A_{j-1} 中的低频部分。

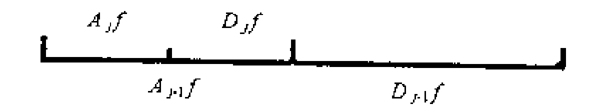


图 6.1　式（6.18）的频带关系

§6.3　马拉算法

一、小波分解

根据 $V_{j-1}=V_j\oplus W_j$，$V_j\subset V_{j-1}$，$W_j\subset V_{j-1}$，有

$$
2^{-j/2}\varphi(2^{-j}x-n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\langle 2^{-j/2}\varphi(2^{-j}u-n),2^{-(j-1)/2}\varphi(2^{-(j-1)}u-k)\right\rangle\cdot 2^{-(j-1)/2}\varphi(2^{-(j-1)}x-k) \tag{6.19}
$$

与

$$
2^{-j/2}\psi(2^{-j}x-n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\langle 2^{-j/2}\psi(2^{-j}u-n),2^{-(j-1)/2}\varphi(2^{-(j-1)}u-k)\right\rangle\cdot 2^{-(j-1)/2}\varphi(2^{-(j-1)}x-k) \tag{6.20}
$$

将式（6.10）和式（6.13）定义的h_{k-2n}和g_{k-2n}代入式（6.19）和（6.20）有

$$2^{-j/2}\varphi(2^{-j}x-n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_{k-2n}\cdot 2^{-(j-1)/2}\varphi(2^{-(j-1)}x-k) \tag{6.21}$$

与

$$2^{-j/2}\psi(2^{-j}x-n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}g_{k-2n}\cdot 2^{-(j-1)/2}\varphi(2^{-(j-1)}x-k) \tag{6.22}$$

因此，由式（6.21）有

$$\left\langle f(u),2^{-j/2}\varphi(2^{-j}u-n)\right\rangle=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_{k-2n}\left\langle f(u),2^{-(j-1)/2}\varphi(2^{-(j-1)}u-k)\right\rangle \tag{6.23}$$

即

$$a_n^j=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_{k-2n}a_k^{j-1} \tag{6.24}$$

由式（6.22）有

$$\left\langle f(u),2^{-j/2}\psi(2^{-j}u-n)\right\rangle=\sum_{n=-\infty}^{\infty}g_{k-2n}\left\langle f(u),2^{-(j-1)/2}\varphi(2^{-(j-1)}u-k)\right\rangle \tag{6.25}$$

即

$$d_n^j=\sum_{k=-\infty}^{\infty}g_{k-2n}a_k^{j-1} \tag{6.26}$$

令

$$\overline{h_n}=h_{-n},\overline{g_n}=g_{-n}$$

则式（6.24）与式（6.26）变为

$$a_n^j=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\bar{h}_{2n-k}a_k^{j-1} \tag{6.27}$$

$$d_n^j=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\bar{g}_{2n-k}a_k^{j-1} \tag{6.28}$$

式（6.27）和（6.28）就是小波分解的马拉算法。图 6.2 表示小波分解的马拉算法，$\downarrow 2$表示1/2抽样，即从a_k^{j-1}到a_k^j和d_k^j，样点数减少一半。

二、小波重构

根据$V_{j-1}=V_j\oplus W_j$，$2^{-(j-1)/2}\varphi(2^{-(j-1)}x-n)\in V_{j-1}$，及$V_j$与$W_j$两个正交基之和就是$V_{j-1}$的正交基，有

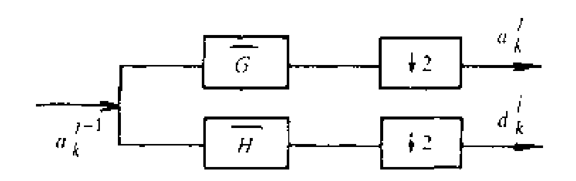


图 6.2　小波分解的马拉算法

$$
\begin{aligned}
&2^{-(j-1)/2}\varphi(2^{-(j-1)}x-n)\\
&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\langle 2^{-j/2}\varphi(2^{-j}u-k),2^{-(j-1)/2}\varphi(2^{-(j-1)}u-n)\right\rangle 2^{-j/2}\varphi(2^{-j}x-k)+\\
&\quad\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\langle 2^{-j/2}\psi(2^{-j}u-k),2^{-(j-1)/2}\varphi(2^{-(j-1)}u-n)\right\rangle 2^{-j/2}\psi(2^{-j}x-k)
\end{aligned}
\tag{6.29}
$$

与小波分解马拉算法推导相同，引入系数 h_n 和 g_n，上式简化为

$$
\begin{aligned}
&\left\langle f(u),2^{-(j-1)/2}\varphi(2^{-(j-1)}u-n)\right\rangle\\
&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_{n-2k}\left\langle f(u),2^{-j/2}\varphi(2^{-j}u-k)\right\rangle+\sum_{k=-\infty}^{\infty}g_{n-2k}\left\langle f(u),2^{-j/3}\psi(2^{-j}u-k)\right\rangle
\end{aligned}
\tag{6.30}
$$

即

$$
a_n^{j-1}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_{n-2k}a_k^j+\sum_{k=-\infty}^{\infty}g_{n-2k}d_k^j \tag{6.31}
$$

式（6.30）和（6.31）即为小波重构的马拉算法。图 6.3 为这种算法的示意图，↑2 表示内插，即由 a_k^j 和 d_k^j 到 a_k^{j-1}，样点数增加一倍。

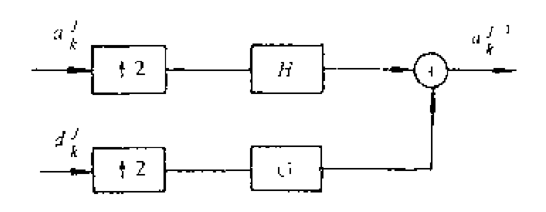


图 6.3　小波重构的马拉算法示意

三、实际资料处理

实际测量的信号，只能得到有限的频率分辨率，设其频率上限为 ω_N，其中有 N 个采样点 $\{f_k\}_{1\le k\le N}$。首先将 $\{f_k\}$ 投影到 V_0 上得到 $A_0 f$（或记为 f_N），然后按式（6.27）和式（6.28）求得不同 j 值下离散近似和离散细节（称为分解系数），从系数中可进一步研究信号的特征。有时需要连续的近似部分和连续的细节部分，可采用式（6.23）和式（6.25）得到。图 6.4 表示了不同 j 值时近似部分和细节部分的频段。

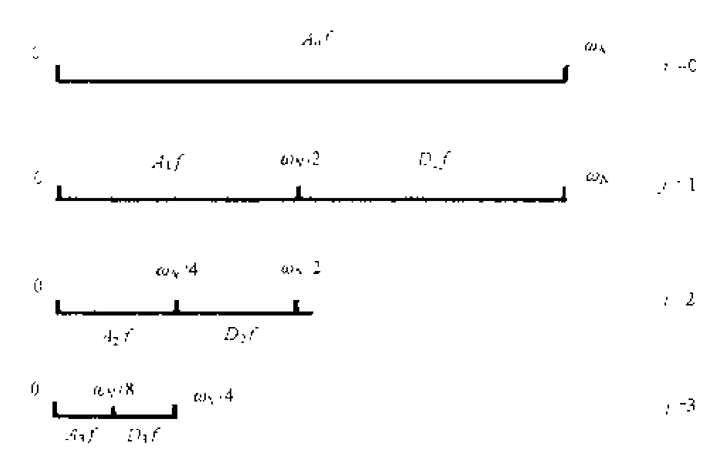


图 6.4　小波分解在不同 j 值时的近似部分和细节部分

表 6.1 给出了不同 j 值时 a_k^j 和 d_k^j 样点数目 n。

表 6.1　不同 j 值时 a_k^j 和 d_k^j 样点数目 n

j	0	1	2	3	…
n	N	$N/2$	$N/4$	$N/8$	…

§6.4　C_n^N 的计算

假定正交小波函数 ψ，且尺度函数和小波都是实函数。在进行小波变换时，首先需要将信号 $f(x)$ 在选定的水平 N 下投影到尺度函数 $\varphi(x)$ 上得 $f_N(x)$，$f_N(x)\in V_N$。

$$f_N(x)=\sum_N C_n^N \varphi(2^{-N}x-n) \tag{6.32}$$

因此计算 $f_N(x)$ 实际就是求系数 C_n^N。

因为　$$\Phi_{N,n}(x)=2^{-N/2}\varphi(2^{-N}x-n)$$

所以式（6.32）变为

$$f_N(x)=\sum_N C_n^N 2^{N/2}\varphi_{N,n}(x) \tag{6.33}$$

对式（6.33）两边求关于 $\varphi_{N,n}(x)$ 的内积：

$$\langle f_N,\varphi_{N,n}\rangle = C_n^N\cdot 2^{N/2} \tag{6.34}$$

$$\begin{aligned}C_n^N &= 2^{-N}\langle f_N(x),\varphi(2^{-N}x-n)\rangle \\ &= 2^{-N}\int_{-\infty}^{\infty} f_N(x)\cdot\varphi(2^{-N}x-n)\cdot 2^N \mathrm{d}\left(\frac{x}{2^N}\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_N\left(\frac{2^N x}{2^N}\right)\varphi(2^{-N}x-n)\mathrm{d}\left(\frac{x}{2^N}\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_N(2^N x)\varphi(x-n)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{6.35}$$

在 N 水平下的采样步长为 $\Delta x = \frac{1}{2^N}$，所以

$$f_N(2^N k) = f(2^N k) \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{6.36}$$

$$C_n^N = \left\langle f(2^N \cdot), \varphi(\cdot - n) \right\rangle \tag{6.37}$$

计算式（6.37）时需知道 $\varphi(x)$ 在整数点的值 $\varphi(1), \varphi(2), \cdots, \varphi(L-1)$，§5.3 中已介绍了如何求得 $\varphi(x)$ 的值。

上述求 C_n^N 的方法称为小波变换方法。除了这种方法外，有时直接选取

$$C_n^N = f(2^N n) \tag{6.38}$$

这种做法会带来一定的误差，所以在做时频分析图和提取分形指数时，不采用直接选取法。

还需说明一点，本书在进行小波分解时，是将得到的 $\{C_n^N\}$ 作为最高频率（$[-2^N \pi, 2^N \pi]$）时的离散近似系数 $\{a_k^0\}$，进而采用马拉方法求得系数 a_k^j 和 d_k^j。

第七章 正交小波包

给定一个信号进行采样，则信号就在一个有限的频域中给定了。当进行小波分解时，得到的高频信号和低频信号就在这个频域中分别占据一半宽的频带（图 6.4）。再一次用小波分解时，又把低频部分分为两个同样宽的频带，依此类推。在一些研究中，需要对高频部分的信号也进行再分解，这就是小波包分解。

小波包是由 Meyer、Coifman 和 Wickerhauser 在 1989 年引入的。他们在研究正交小波基的基础上创立了正交小波包方法，后来又发展成半正交小波包和广义小波包。

所谓小波包，简单地说是一个函数族。由它们构造出 $L^2(R)$ 的规范正交基库。从此库中可以选出 $L^2(R)$ 的许多组规范正交基。前述的小波正交基只是其中的一组。所以小波包是小波概念的推广。本章仅介绍正交小波包。

§7.1 小波包的定义和性质

一、小波包的定义

给定正交尺度函数 $\varphi(x)$ 和小波函数 $\psi(x)$，其两尺度方程为

$$\varphi(x)=\sqrt{2}\sum_k h_k\varphi(2x-k) \tag{7.1}$$

$$\psi(x)=\sqrt{2}\sum_k g_k\varphi(2x-k) \tag{7.2}$$

式中，h_k和g_k是多分辨率分析中的滤波器系数。

为了进一步推广两尺度方程，记 $w_0(x)=\varphi(x), w_1(x)=\psi(x)$，定义下面的递推关系：

$$w_{2n}(x)=\sqrt{2}\sum_k h_k w_n(2x-k) \tag{7.3}$$

$$w_{2n+1}(x)=\sqrt{2}\sum_k g_k w_n(2x-k) \tag{7.4}$$

式中，h_k 和 g_k 仍为式（7.1）和（7.2）中的滤波器系数。当 $n=0$ 时，$w_0(x)=\varphi(x)$，$w_1(x)=\psi(x)$。

二、小波包的性质

这里只考虑两个性质：$w_n(x)$ 在频率里的表示式，以及 $w_n(x)$ 的正交性质。

1. $w_n(x)$ 的频域表示式

设 $n\in Z_+$（正整数），前面已有

$$H(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_k h_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega k}$$

$$G(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_k g_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega k}$$

另外，任一正整数都可用二进制表示为

$$n=\sum_{j=1}^{\infty}2^{j-1}\cdot\varepsilon_j,\quad \varepsilon_j=0\text{或者}1 \tag{7.5}$$

则

$$W_n(\omega)=\prod_{k=1}^{\infty}H_{\varepsilon_k}\left(\frac{\omega}{2^k}\right),\quad \varepsilon_j=0\text{或者}1 \tag{7.6}$$

其中，$H_0(\omega)=H(\omega), H_1(\omega)=G(\omega)$

证明：对式（7.3）和（7.4）两边取傅里叶变换有

$$\begin{cases} W_{2n}(\omega)=H_0\left(\frac{\omega}{2}\right)\cdot W_n\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ W_{2n+1}(\omega)=H_1\left(\frac{\omega}{2}\right)\cdot W_n\left(\frac{\omega}{2}\right) \end{cases} \tag{7.7}$$

将$W(\omega/2)$递推下去，并应用式（7.5），则

$$W_n(\omega)=\prod_{k=1}^{\infty}H_{\varepsilon_k}\left(\frac{\omega}{2^k}\right)$$

2. w_n 的正交性

$\{w_n(x)\big|_{n\in Z_f}\}$是正交尺度函数$\varphi(x)$的正交小波包，即

$$\langle w_n(x-k), w_n(x-l)\rangle=\delta_{kl} \tag{7.8}$$

证明：

$$\langle w_n(x-k), w_n(x-l)\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|W_n(\omega)|^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-l)\omega}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|H_{\varepsilon_k}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2\left|W_{[\frac{n}{2}]}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-l)\omega}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{4\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-l)\omega}\left|H_{\varepsilon_k}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2\sum_m\left|W_{[\frac{n}{2}]}\left(\frac{\omega}{2}+2\pi m\right)\right|^2\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{4\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-l)\omega}\left|H_{\varepsilon_k}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2\mathrm{d}\omega\qquad\left(\text{因为}\sum_m\left|W_{[\frac{n}{2}]}\left(\frac{\omega}{2}+2\pi m\right)\right|^2=1\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-l)\omega}\mathrm{d}\omega=\delta_{kl}\qquad\left(\text{因为}|H(\omega)|^2+|H(\omega+\pi)|^2=1\right)$$

因此，$w_n(x-k)|_{k\in Z,n\in Z_+}$ 构成$L^2(R)$的规范正交基。考虑到尺度因子 j，下述函数的全体

$$2^{-j/2}w_n(2^{-j}x-k)/j,k\in Z,\quad n\in Z_+ \tag{7.9}$$

称为小波包规范正交基库。式中 j 是尺度参数，k 是位置参数，n 是振荡次数。

§7.2 小波包的子空间分解

一、子空间的分解过程

由式（7.3）和（7.4）看出，$n=0$时 $w_0(x)$ 即为尺度函数，$w_1(x)$ 即为小波 $\psi(x)$。由多分辨率分析知道，尺度函数张成的子空间为$\{V_j\}$，小波函数张成的子空间为$\{W_j\}$。为了讨论小波包张成的子空间，引入符号

$$\begin{cases}U_j^0=V_j & j\in Z\\ U_j^1=W_j & j\in Z\end{cases} \tag{7.10}$$

根据希尔伯特空间的正交分解$V_j=V_{j+1}\oplus W_{j+1}$，用式（7.10）表示为

$$U_j^0=U_{j+1}^0\oplus U_{j+1}^1 \qquad j\in Z \tag{7.11}$$

将(7.11)式推广到小波包，$n\in Z_+$，则有

$$U_j^n=U_{j+1}^{2n}\oplus U_{j+1}^{2n+1} \quad j\in Z \tag{7.12}$$

式（7.12）是对式（7.3）和（7.4）的下标n的正交分解，U_{j+1}^{2n}和U_{j+1}^{2n+}是U_j^n的子空间，U_{j+1}^{2n}对应着 w_{2n}，U_{j+1}^{2n+1}对应着 w_{2n+1}。在多分辨率分析中，$L^2(R)=\underset{j\in Z}{\oplus}W_j$。为了便于比较，用$W_j^n$表示$U_j^n$，因此小波包空间分解为

$$W_j^n=U_j^n=U_{j+1}^{2n}\oplus U_{j+1}^{2n+1} \tag{7.13}$$

在多分辨率分析中，把$L^2(L)$空间分解为子空间$\{W_j\}_{j\in Z}$，在小波包分解中，将W_j再按二进方式进行分解。因为$n=0$对应着小波分解，所以只考虑$n=1,2,\cdots$，和$j=1,2,\cdots$。将式（7.13）递推下去有

$$W_j=W_j^1=U_j^1=U_{j+1}^2\oplus U_{j+1}^3$$

$$U_{j+1}^2=U_{j+2}^4\oplus U_{j+2}^5$$
$$U_{j+1}^3=U_{j+2}^6\oplus U_{j+2}^7$$
$$\vdots$$

这样就得到小波包分解的一般形式为

$$
\begin{cases}
W_j = U_{j+1}^2 \oplus U_{j+1}^3 \\
W_j = U_{j+2}^4 \ominus U_{j+2}^5 \oplus U_{j+2}^6 \oplus U_{j+2}^7 \\
\quad \vdots \\
W_j = U_{j+k}^{2^k} \oplus U_{j+k}^{2^k+1} \oplus \cdots \oplus U_{j+k}^{2^{k+1}-1}
\end{cases}
\tag{7.14}
$$

由式（7.14）看出，小波包分解的一般表示式为

$$
U_{j+k}^{2^k+m}
\begin{cases}
m = 0,1,\cdots,2^k - 1 \\
k = 1,2,\cdots \\
j = 1,2,\cdots
\end{cases}
\tag{7.15}
$$

子空间$U_{j+k}^{2^k+m}$对应的规范正交基为

$$
\left\{2^{-(j+k)/2} w_{2^k+m}(2^{-(j+k)} x - l)\right\} \qquad l \in Z \tag{7.16}
$$

当$k = 0$和$m = 0$，子空间$U_{j+k}^{2^k+m}$还原为$U_j^1 = W_j$，其正交基就是小波$\{2^{-j/2} w_1(2^{-j} x - l), l \in Z\}$。

在很多文章和专著中都采用$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$表示子空间分解过程，而本书一直采用表示式$V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1}$。这种表示法更适用于实际资料处理。因为任何实际信号都只有有限的频域，这个频域的频带由物理测量仪器确定。在实际资料处理中，方便地取原始资料对应着子空间V_0，分解过程中随着尺度参数j的增大，子空间对应的频率越来越低。根据研究问题的需要，到某个j就停止分解了。

为了清楚，下面用图7.1来表示式（7.14）的分解过程。图中对$j = 1 \sim 3$的W_j进行了分

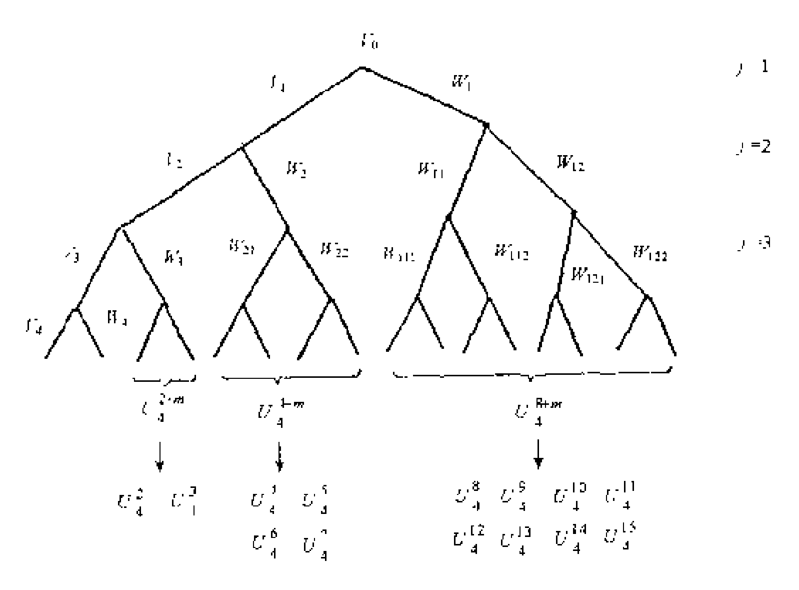


图 7.1　小波分解过程示意

解。W_3 分解为 2 个子空间，W_2 分解为 4 个子空间，W_1 分解为 8 个子空间，共计为 14 个子空间（$\sum_j 2^j$ 个子空间）。图中 j 为尺度参数，表示分解到哪一个层次，k 表示 j 层中哪个分支，m 表示分支中的个数。

二、子空间的频带

在 W_j 的子空间里，第 j 个频带的频率窗口为

$$H_j=\left(\frac{\omega_0}{2^j}-\frac{\sigma_\omega}{2^j},\frac{\omega_0}{2^j}+\frac{\sigma_0}{2^j}\right) \tag{7.17}$$

在小波包分解中，将频带 j 又按二进方式细分为 2^k 个子频带：

$$H_j^{k,m},\quad m=0,1,2,\cdots,2^k-1 \tag{7.18}$$

全部子频带 $H_j^{k,m}$ 构成 H_j：

$$\bigcup_{m=0}^{2^k-1} H_j^{k,m}=H_j \tag{7.19}$$

由式（7.19）看出，小波包分解提高了对信号高频成分的分辨率。

§7.3　小波包分解与重构算法

在§6.2 中已给出信号 $f(x)$ 的正交小波分解公式为

$$A_{j-1}f(x)=A_jf(x)+D_jf(x)$$

$$A_jf(x)=\sum_n a_n^j\cdot\varphi_{j,n}(x)$$

$$D_jf(x)=\sum_n d_n^j\cdot\psi_{j,n}(x)$$

系数 a_n^j 和 d_n^j 的递推公式为

$$\begin{cases}a_n^j=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}h_{k-2n}a_k^{j-1}\\ d_n^j=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}g_{k-2n}a_k^{j-1}\end{cases} \tag{7.20}$$

设

$$G_j^nf(x)\in U_j^n$$

$$G_j^nf(x)=\sum_l d_l^{j,n}\cdot w_n(2^{-j}x-l)$$

因为 $G_j^nf(x)=G_{j+1}^{2n}f(x)+G_{j+1}^{2n+1}f(x)$，所以有小波包系数递推公式：

$$\begin{cases} d_l^{j+1,2n} = \sum_k h_{k-2l} d_k^{j,n} \\ d_l^{j+1,2n+1} = \sum_k g_{k-2l} d_k^{j,n} \end{cases} \tag{7.21}$$

小波的重构公式为

$$d_l^{j,n} = \sum_k [h_{l-2k} d_k^{j+1,2n} + g_{l-2k} d_k^{j+1,2n+1}] \tag{7.22}$$

§7.4　最好基的选择

小波包基库是由许多小波包基组成的。不同的小波包基具有不同的性质，能够反映信号的不同特征。对于一个给定的信号，选择一合适的（好的）小波包基，能够很好地提取信号的特征。选择合适的（好的）小波包基涉及两个问题：一是什么是好基，二是如何选择好基。

信号 $f(x)$ 的小波包分解，是将 $f(x)$ 投影到小波包基上，获得一列系数 $d_l^{j,n}$，要用这列系数刻划信号 $f(x)$ 的特征，系数之间的差别越大越好。如果仅有少数 $d_l^{j,n}$ 很大，那么用这少数几个系数就代表了信号 $f(x)$ 的特征。显然，这样的小波包基是好基。如果这列系数之间差别不大，那么就很难找到信号 $f(x)$ 的特征，与之对应的基就不是好基。要刻画系数系列的这种性质，需定义一个代价函数 $M(x_k)$，代价函数越小，对应的小波包基越好，这种代价函数还需具备可加性，即 $M(0)=0$，$M(x_k)=\sum_k M(x_k)$。在上述意义下可以定义多种代价函数。但目前用得较多的是香农（Shannon）熵。对序列 $\{x_k\}$ 熵的定义为

$$M(x) = -\sum_k p_k \lg p_k, \qquad p \lg p = 0 \quad 当 p=0 \tag{7.23}$$

其中 $p_k = \frac{|x_k|^2}{\|x\|^2}$。由于信息熵只是半可加的，所以引入可加函数 $\lambda(x) = -\sum_k |x_k|^2 \lg |x_k|^2$，则 $M(x)$ 可表示为

$$M(x) = \|x\|^2 \lambda(x) + \lg \|x\|^2 \tag{7.24}$$

这样 $\lambda(x)$ 最小，$M(x)$ 也最小。

在实际应用中，只对 V_N 作有限次分解。设把 V_N 分作三层。由小波包算法可计算出 $f(x)$ 在各子空间上的系数，然后由代价函数 $M(x)$ 可以计算出在各层上系数的代价函数值。图 7.2(a)给出了各部分的代价函数值。为了选择最好基，采用如下步骤：

（1）从最下层开始，把每个框中的代价函数值都标上*号。

（2）求最下层的相邻两个子框的代价函数值之和，并与上层相邻框中的代价函数值相比较，如下层的和值大，则将上层相应框中的值标上*号，否则的话把该值加上括号，且把下层的和值写在括号外面。

（3）只考虑括号外面值和标*号的值，按步骤（2）继续进行，直到最上层。结果如图

7.2(b)

（4）从最上层开始，只选第一次遇到的标*号的值。一经选定，其下方的各层的值就不再考虑。选出的带*号框全体组成V_N的一组正交基，如图 7.2(c)中的空白框，这样的一组正交分解所对应的规范正交基，就是$f(x)$的最好基。

从信号处理的观点看，上述最好基的搜索过程实质上是用尽量少的系数，反映尽可能多的信息，达到特征提取的目的。

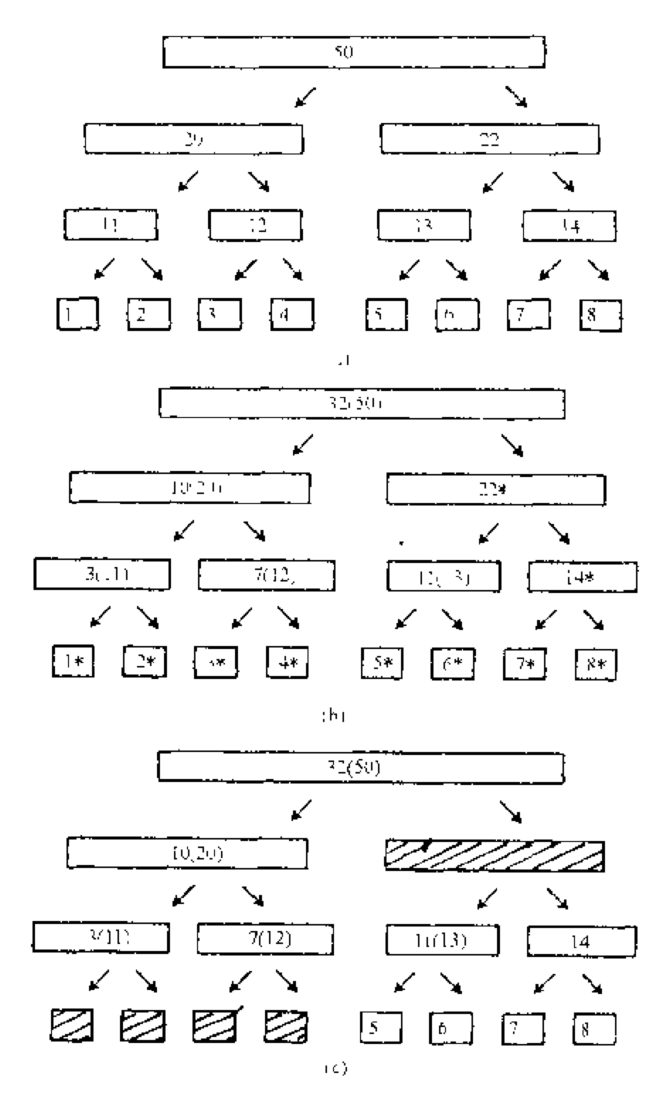


图 7.2　最优基算法的图形描述

第八章　几种常用小波

随着小波理论及各种数值算法的发展，人们在一些基本小波的基础上，构造了满足不同需要的小波；但基本小波也就那么几种，本章就介绍几种常用的一维小波及其性质。

§8.1　常用小波

一、Haar 小波

A.Haar 于 1990 年提出一种正交函数系，定义如下：

$$\psi(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<1/2\\ -1 & 1/2\le x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\tag{8.1}$$

这是一种最简单的正交小波，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)\psi(x-n)\mathrm{d}x=0\qquad n=\pm1,\pm2,\cdots\tag{8.2}$$

图 8.1 是 Haar 小波的形状图。

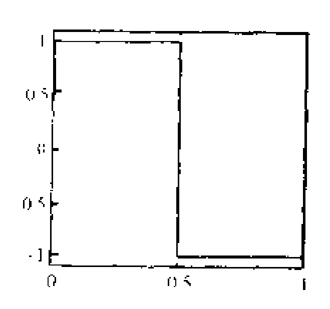


图 8.1　Haar 小波

引入具有正交性的特征函数 $\phi_H(x)$

$$\phi_H(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\tag{8.3}$$

特征函数 $\phi_H(x)$ 就是尺度函数。Haar 小波可用 $\phi_H(x)$ 表示为

$$\psi(t)=\phi_{H\left(\frac{n-1}{2},\frac{n}{2}\right)}(x)-\phi_{H\left(\frac{n}{2},\frac{n+1}{2}\right)}(x)\qquad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

Haar 小波不是连续可微的，应用有限，多用于理论研究。实质上，Haar 小波是 $N=1$ 时的 Daubechies 小波。

二、Daubechies 小波

该小波是 Daubechies 从两尺度方程系数 $\{h_k\}$ 出发设计出来的离散正交小波。一般简写为

db$N$，N 是小波的阶数。小波 ψ 和尺度函数 φ 中的支撑区为 $2N-1$。ψ 的消失矩为 N。除 $N=1$ 外（Haar 小波），db$N$ 不具对称性（即非线性相位）。db$N$ 没有显式表达式（除 $N=1$ 外）。但 $\{h_k\}$ 的传递函数的模的平方有显式表达式。

令
$$P(y)=\sum_{k=0}^{N-1} C_k^{N-1+k} y^k$$

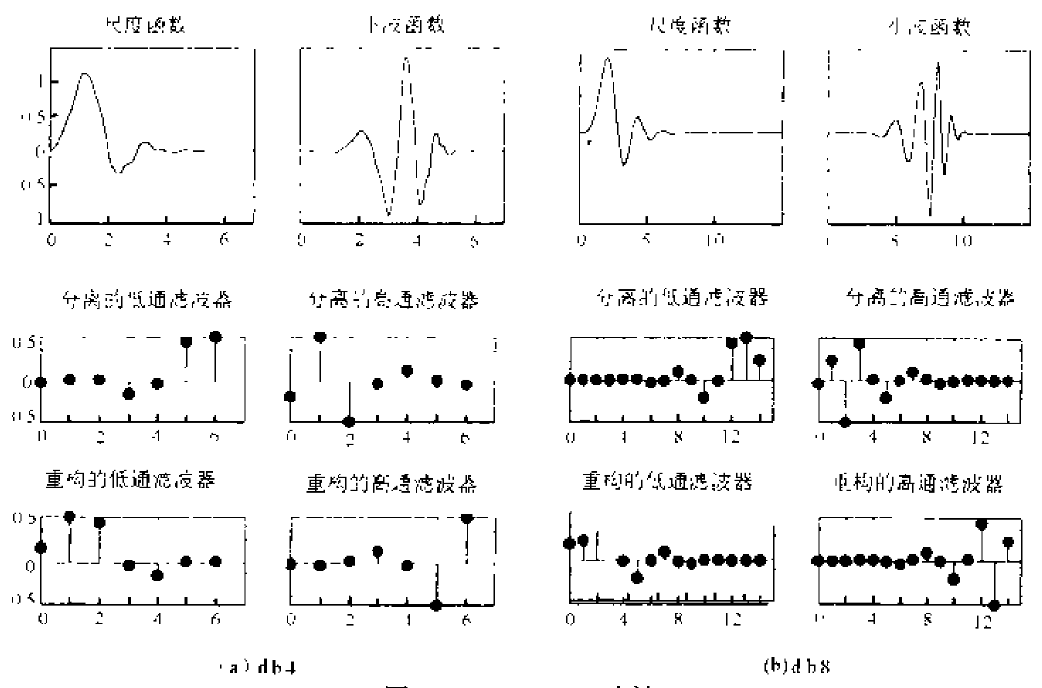
其中 C_k^{N-1+k} 为二项式系数。则

$$|m_0(\omega)|^2=(\cos^2\frac{\omega}{2})^N P(\sin^2\frac{\omega}{2})$$

而
$$m_0(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{2N-1} h_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega} \tag{8.4}$$

式（8.4）为 $\{h_k\}$ 的传递函数。

图 8.2 给出了 db4 和 db8 的尺度函数和小波，以及分解用的低通和高通滤波器，重构用的低通和高通滤波器。



(a) db4　　(b) db8

图 8.2　Daubechies 小波

图 8.3 是 db2~db10 的小波形状。

三、Mexico 草帽小波

Mexico 草帽小波是由高斯函数 $\mathrm{e}^{-x^2/2}$ 的二阶导数导出来的。

$$\psi(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}\pi^{-1/4}(1-x^2)\mathrm{e}^{-x^2/2} \tag{8.5}$$

该小波无尺度函数。主要用于信号处理和边缘检测，是非正交分解。

Mexico 草帽小波是实值小波，其形状如图 8.4 所示。

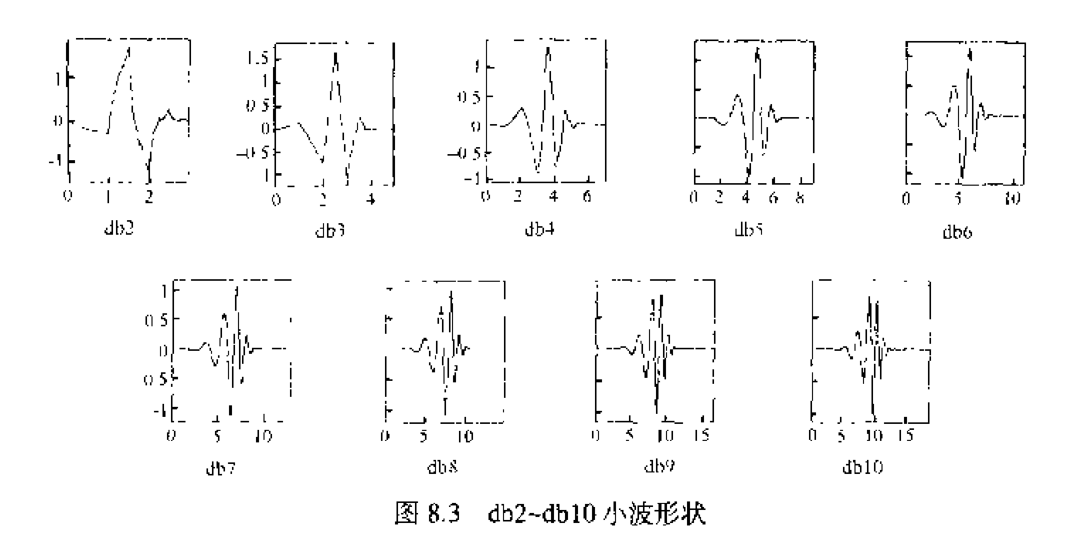


图 8.3　db2~db10 小波形状

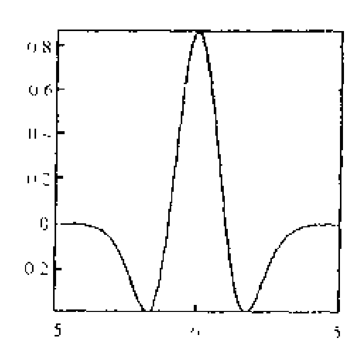


图 8.4　Mexico 草帽小波

四、Morlet 小波

常用的是复值 Morlet 小波：

$$\psi(t)=\pi^{1/4}(e^{-i\omega_0 x}-e^{-\omega_0^2/2})e^{-x^2/2} \tag{8.6}$$

其傅里叶变换为

$$\Psi(\omega)=\sqrt{2}\pi^{1/4}(e^{-(\omega-\omega_0)^2/2}-e^{-\omega_0^2/2}e^{-\omega^2/2}) \tag{8.7}$$

由式（8.7）看出，当 $\omega=0$ 时，$\Psi(0)=0$，满足容许条件，因此 Morlet 小波是容许小波。应用中取 $\omega_0\geq 5$，因此可忽略式（8.6）中的第二项，即

$$\begin{aligned}\psi(t)&=\pi^{-1/4}e^{-i\omega_0 t}\cdot e^{-x^2/2}\\ \Psi(\omega)&=\sqrt{2}\pi^{1/4}e^{-(\omega-\omega_0)^2/2}\end{aligned}\qquad \omega_0\geq 5 \tag{8.8}$$

仍然能近似满足容许条件，因为 $\omega=0$ 时，

$$\Psi(0)=\sqrt{2}\pi^{1/4}e^{-\omega_0^2/2}\approx 0$$

因为 Morlet 小波是复值小波，能够提取信号中的幅值和相位信息，在地球物理信号处理中广泛应用。

Morlet 小波没有尺度函数 φ，而且是非正交分解。

五、Meyer 小波

Meyer 小波是在频率域中定义的。其定义式为：

$$\begin{cases} \Psi(\omega)=(2\pi)^{-1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega/2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}v\left(\dfrac{3}{2\pi}|\omega|-1\right)\right) & \dfrac{2\pi}{3}\le|\omega|<\dfrac{4\pi}{3} \\ \Psi(\omega)=(2\pi)^{-1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega/2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}v\left(\dfrac{3}{4\pi}|\omega|-1\right)\right) & \dfrac{4\pi}{3}\le|\omega|\le\dfrac{8\pi}{3} \\ \Psi(\omega)=0 & |\omega|\notin\left[\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{8\pi}{3}\right] \end{cases} \tag{8.9}$$

其中 $v(a)=a^4(35-84a+70a^2-20a^3),\quad a\in[0,1]$

$$\begin{cases} \Phi(\omega)=(2\pi)^{-1/2} & |\omega|\le\dfrac{2\pi}{3} \\ \Phi(\omega)=(2\pi)^{-1/2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}v\left(\dfrac{3}{2\pi}|\omega|-1\right)\right) & \dfrac{2\pi}{3}\le|\omega|\le\dfrac{4\pi}{3} \\ \Phi(\omega)=0 & |\omega|>\dfrac{4\pi}{3} \end{cases} \tag{8.10}$$

Meyer 小波不是紧支撑的，但收敛得很快：

$$|\psi(x)|\le C_n(1+|x|^2)^{-n}$$

$\psi(x)$ 无限可微，图 8.5 为 Meyer 小波和尺度函数形状。

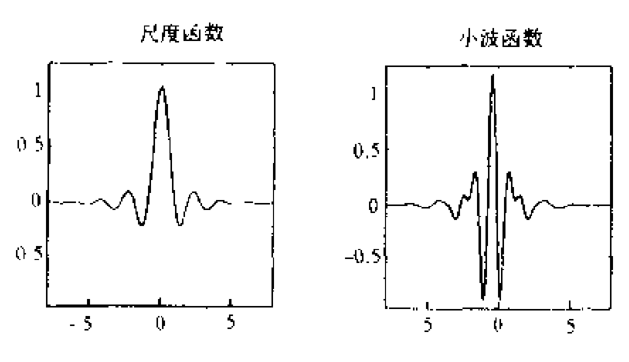


图 8.5 Meyer 小波和尺度函数

六、Symlet 小波

它是对 dbN 小波修正得到的。Symlet 小波的性质与 dbN 相似，但更近于对称小波。图 8.6 给出了 $N=4$ 和 8 的 Symlet 小波的尺度函数和小波。图 8.7 是 $N=4$ 和 8 的 Symlet 小波分解时的低通和高通滤波器，以及重构时的低通和高通滤波器。

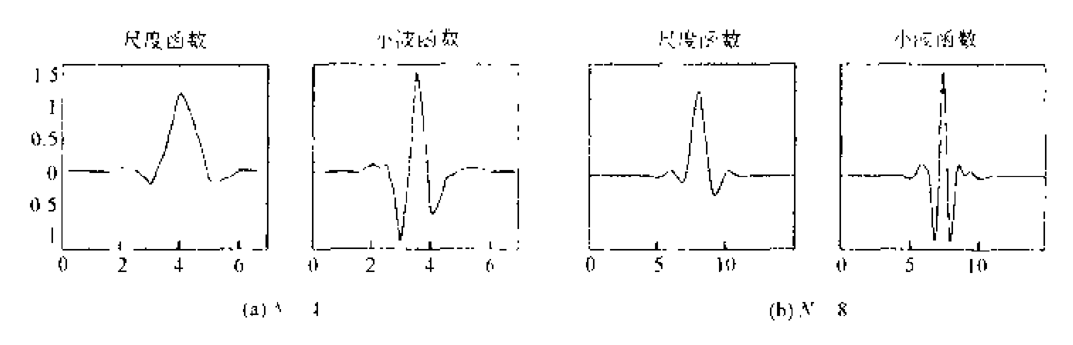


图 8.6　Symlet 小波的尺度函数和小波

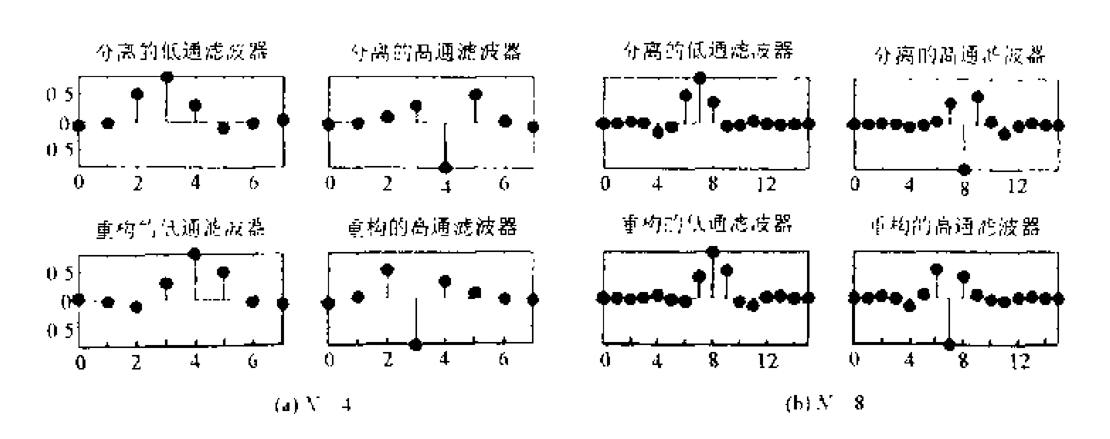


图 8.7　Symlet 小波分解时的低通和高通滤波器，以及重构时的低通和高通滤波器

七、Coiflet 小波

根据 R.Coifman 的要求，Daubechies 构造了 Coiflet 小波。其小波 ψ 的 $2N$ 阶矩为零，尺度函数的 $2N-1$ 阶矩为零。ψ和φ 的支撑长度为 $6N-1$。Coiflet 的ψ和φ 比 db$N$ 的更接近对称性。图 8.8 为 $N=3$ 和 5 的 Coiflet 小波和尺度函数。图 8.9 为相应的低通和高通滤波器。

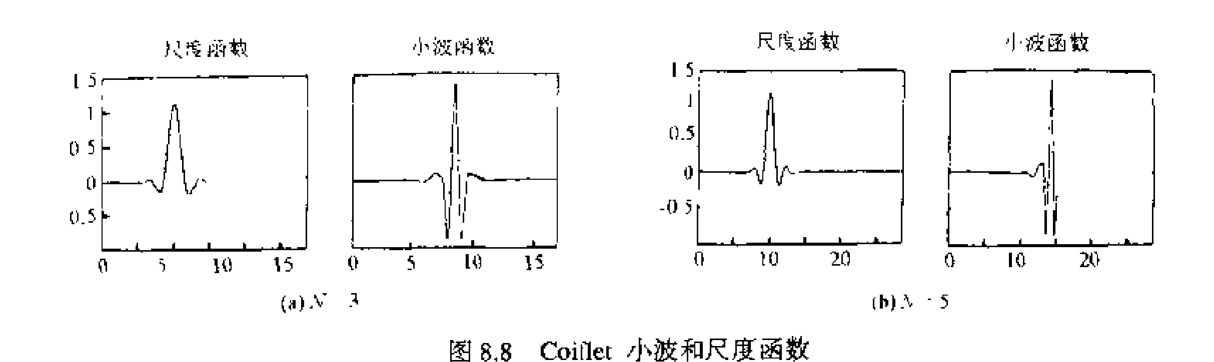


图 8.8　Coiflet 小波和尺度函数

八、双正交小波（biorNr.Nd）

为了解决对称性和精确信号重构的不相容性，引入了双正交小波，称为对偶的两个小波分别用于信号的分解与重构。

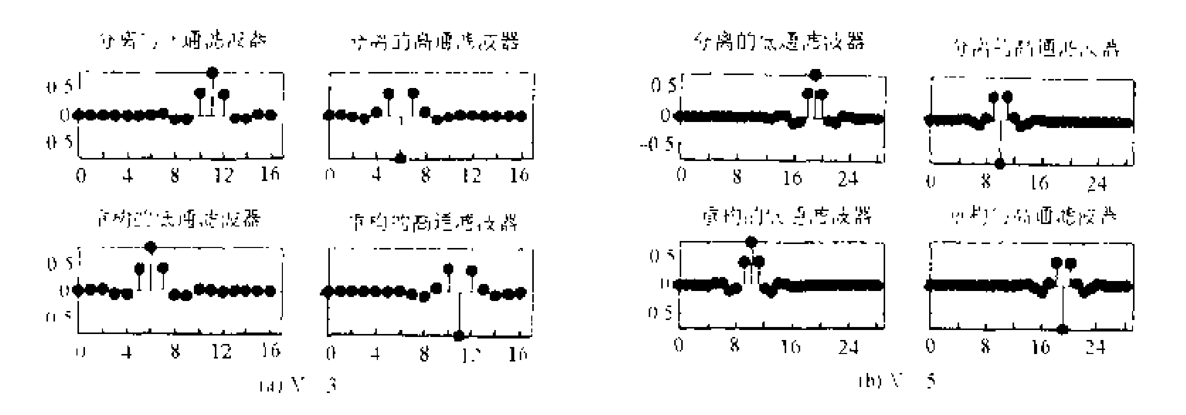


图 8.9　Coiflet 小波低通和高通滤波器

令信号 $s(x)$，在分解中用小波 $\tilde{\psi}(x)$：

$$\tilde{C}_{j,k} = \int s(x)\tilde{\psi}_{j,k}(x)\mathrm{d}x \tag{8.11}$$

重构时用小波 $\psi(x)$：

$$s = \sum_{j,k} \tilde{C}_{j,k}\psi_{j,k} \tag{8.12}$$

对偶小波 $\tilde{\psi}$ 和 ψ 满足下述条件：

$$\begin{cases} \int \tilde{\psi}_{j,k}(x)\psi_{j',k'}(x)\mathrm{d}x = 0 & j \neq j', k \neq k' \\ \int \tilde{\varphi}_{0,k}(x)\varphi_{0,k'}(x)\mathrm{d}x = 0 & k \neq k' \end{cases} \tag{8.13}$$

双正交小波解决了正交性与线性相位要求的矛盾。图 8.10 和图 8.11 给出了 bior2.4 和 bior4.4 的尺度函数、小波和滤波器。

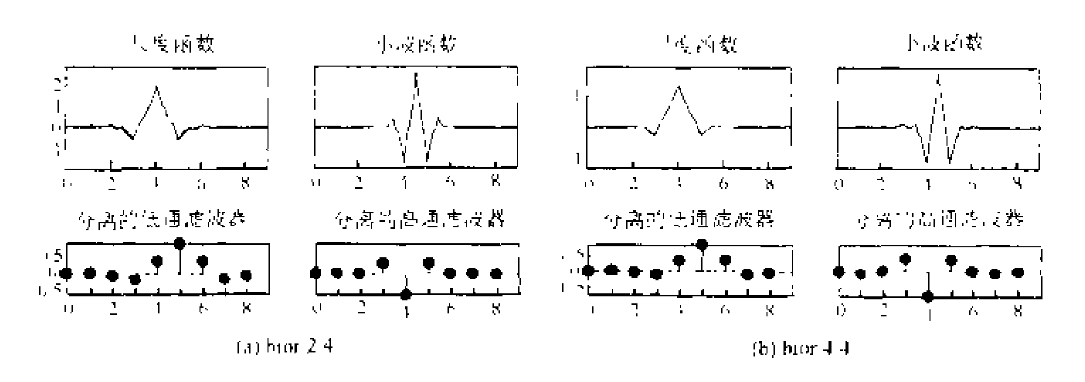
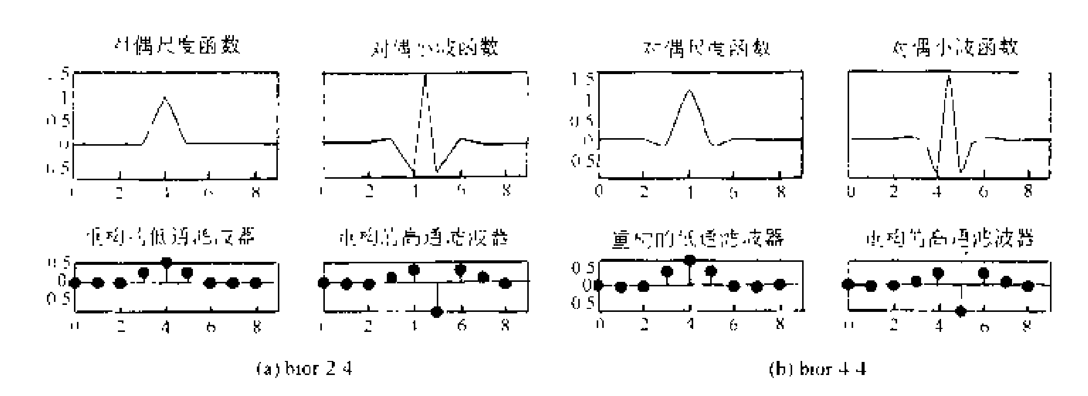


图 8.10　双正交小波的尺度函数和小波

§8.2　小波性质一览表

表 8.1 给出了八种小波的性质以供选用时参考。具有对称性的小波不产生相位畸变。具有好的正则性的小波，易于获得光滑的重构曲线和图像。



(a) bior 2.4　　　　(b) bior 4.4

图 8.11　双正交小波滤波器

表 8.1　小波性质表

性质＼小波	Morlet	Mexico	Meyer	Haar	db$N$	Symlet	Coiflet	biorNr.Nd
紧支撑正交				*	*	*	*	
紧支撑双正交								*
对称	*	*	*	*				*
不对称					*			
近于对称						*	*	
正交分解			*	*	*	*	*	
双正交分解			*	*	*	*	*	*
精确重构			*	*	*	*	*	*
有限滤波器				*	*	*	*	*
快速算法				*	*	*	*	*
显式	*	*		*				样条小波

注：*号表示此种小波具有对应的性质。

第九章 小波在地震资料处理中的应用

小波变换已广泛应用于众多的科学技术领域，如语言识别、音乐、地震勘探、雷达、机械状态监控、故障诊断、机器视觉、CT 成像、纹理识别、数字电视、湍流、天体识别、量子场论等。在数学方面，已用于数值分析、构造快速数值算法、曲线曲面构造、微分方程求解等。在信号处理方面，已用于滤波、去噪、压缩、传递等。在图像处理方面，已用于图像压缩、分类、识别与诊断、去污等。有关文献和著作对上述各方面应用都作了专门论述。本书的第二部分"MATLAB 工具的应用"给出了一些很好的应用例子。这一章仅介绍在地震资料处理中的应用例子。

§9.1 频分析

由前面的讨论知道，小波变换系数 a_k^j 和 d_k^j 实际上是窗口小波变换。当 j 固定时，随着 k 的变化，a_k^j 和 d_k^j 都占满了整个时间域，而且没有重叠；随着 j 的变化，d_k^j 占满了整个频率域，也没有重叠。所以在时间-频率二维图中可以用灰度图清楚地表示出小波变换结果。

设信号 f 在时间域 $[0,T]$ 中采样，共采了 N 个点，采样间隔为 $\Delta t=\dfrac{T}{N}$，$\{f_i\}$ $(i=0,\cdots,N-1)$ 的频带为 $[0,\Omega]$。求出近似部分的系数 $\{a_k^0\}$ $(k=0,1,\cdots,N-1)$，其频带为 $[0,\Omega]$。采用小波变换进行分解，求出系数 a_k^j 和 d_k^j $(j=1,2,\cdots;\ k=0,1,\cdots,2^j-1)$。下面讨论 a_k^j 和 d_k^j 的时域和频域窗口。

1. a_k^0

a_k^0 所表示的是以时刻

$$t_k=k\frac{T}{2^N}+\frac{T}{2^{N+1}}\qquad k=0,1,\cdots,2^{N-1}\tag{9.1}$$

为中心的窗口变换（窗函数是尺度函数 φ），它的频域是 $[0,\Omega]$。

2. a_k^1

a_k^1 所表示的是以时刻

$$t_k=k\frac{T}{2^{N-1}}+\frac{T}{2^N}\qquad k=0,1,\cdots,2^{N-1}-1\tag{9.2}$$

为中心的窗口变换，它的频带是 $[0,\Omega/2]$。

3. d_k^1

d_k^1 所表示的是以时刻

$$t_k = k\frac{T}{2^{N-1}} + \frac{T}{2^N} \qquad k = 0,1,\cdots,2^{N-1}-1 \tag{9.3}$$

为中心的小波变换，其频带是$[\Omega/2,\Omega]$。

一般地，a_k^j所表示的是以时刻

$$t_k = k\frac{T}{2^{N-j}} + \frac{T}{2^{N-j+1}} \qquad k = 0,1,\cdots,2^{N-j}-1 \tag{9.4}$$

为中心的窗口变换，其频带为$[0,\Omega/2^j]$，d_k^j代表的是同一时刻为中心的小波变换，它的频带为$[\Omega/2^j,\Omega/2^{j-1}]$。以$N=16$为例，$j$=0,1,2，图 9.1 给出了$a_k^j$和$d_k^j$的时间域和频率域分布；图 9.2 仅给出频率域分布情况；图 9.3 表示了a_k^j和d_k^j在时-频二维平面中的分布。

作为灰度图的例子，图 9.4 给出了$f(t)=E\sin(bt^2)$（线性调频信号）的小波分析结果。由图看出，其频率随时间以$\omega=2bt$方式增长。

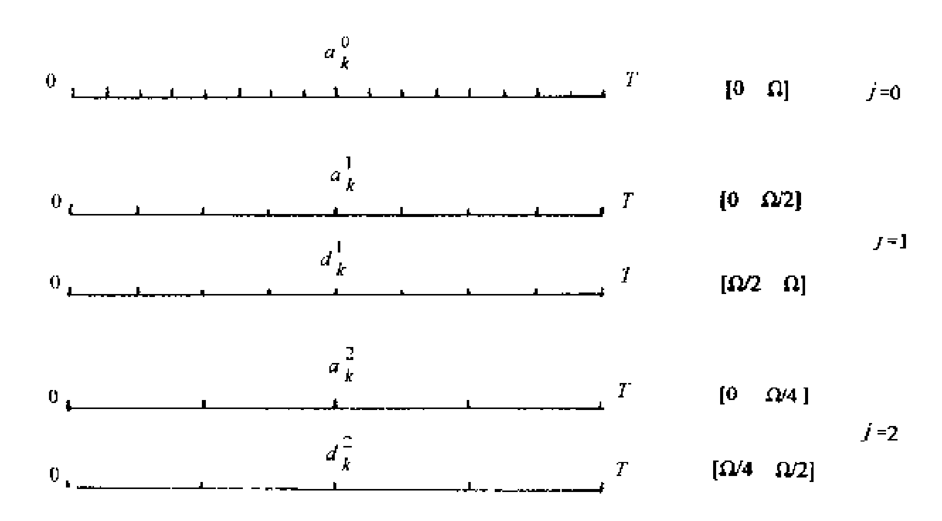


图 9.1　a_k^j和d_k^j的时间域和频率域分布

图 9.2　a_k^j和d_k^j的频率域分布

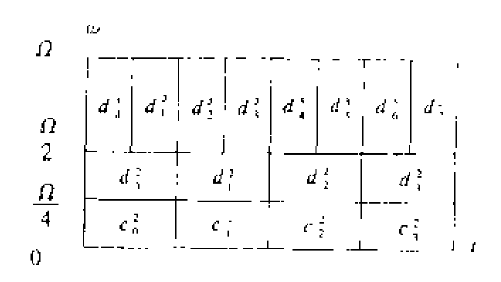


图 9.3　a_k^j 和 d_k^j 在时-频二维平面中的分布

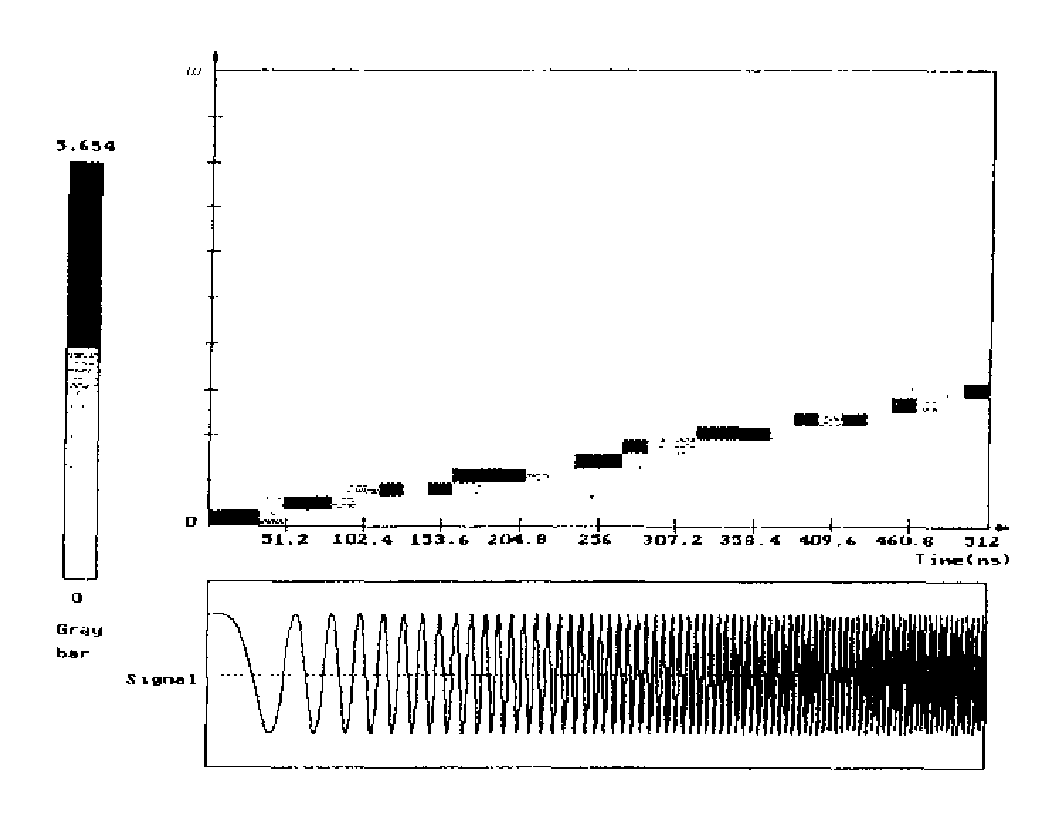


图 9.4　线性调频信号 $f(t)=E\sin(bt^2)$ 的小波分析结果

§9.2　奇异性检测

一、模极大值边缘检测

小波变换的极大值边缘检测法，其实质就是多尺度边缘检测。多尺度边缘检测是在不同尺度上先对信号进行光滑，再由光滑后信号的一阶和二阶导数检测出信号的剧变点(畸变点)。

设实函数 $\theta(x)$ 满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(x)\mathrm{d}x=1 \tag{9.5}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\theta(x)=0 \tag{9.6}$$

则称 $\theta(x)$ 为光滑函数。设 $\theta(x)$ 二阶可导，定义其一阶和二阶导数为

$$\psi^{\mathrm{I}}(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\theta(x),\quad \psi^{\mathrm{II}}(x)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\theta(x) \tag{9.7}$$

这时由式（9.2）可得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi^{\mathrm{I}}(x)\mathrm{d}x=0,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\psi^{\mathrm{II}}(x)\mathrm{d}x=0 \tag{9.8}$$

条件式（9.8）表明，ψ^{I}，ψ^{II} 就是小波。

引入记号

$$\xi_s(x)=\frac{1}{s}\xi(\frac{x}{s}) \tag{9.9}$$

$f(x)$ 关于小波 ψ^{I} 和 ψ^{II} 在尺度 s 和位置 x 上的规范小波变换定义为

$$W_s^{\mathrm{I}}f(x)=f*\psi_s^{\mathrm{I}},\quad W_s^{\mathrm{II}}f(x)=f*\psi_s^{\mathrm{II}} \tag{9.10}$$

而通常的积分小波变换定义为

$$(W_h f)(a,b)=\langle f,h_{a,b}\rangle=|a|^{\frac{1}{2}}\int_{\infty}^{\infty}f(t)\overline{h(\frac{t-b}{a})}\mathrm{d}t$$

其中

$$h_{a,b}=|a|^{-\frac{1}{2}}h(\frac{t-b}{a})$$

由定义式（9.9）可以得到

$$W_s^{\mathrm{I}}f(x)=\langle f,\psi_s^{\mathrm{I}}\rangle=f*(s\frac{\mathrm{d}\theta_s}{\mathrm{d}x})(x)=s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f*\theta_s)(x) \tag{9.11}$$

$$W_s^{\mathrm{II}}f(x)=f*(s^2\frac{\mathrm{d}^2\theta_s}{\mathrm{d}x^2})(x)=s^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(f*\theta_s)(x) \tag{9.12}$$

由式（9.11）与（9.12）可以看到，$f(x)$ 关于 ψ^{I} 与 ψ^{II} 的规范小波变换，变成了与光滑函数 θ_s 的卷积关于 s 的一、二阶导数乘 s 与 s^2。这样，$W_s^{\mathrm{I}}f(x)$ 的局部极值对应 $W_s^{\mathrm{II}}f(x)$ 的零交叉点和 $f*\theta_s(x)$ 的拐点。

当尺度 s 大时，信号与 $\theta_s(x)$ 的卷积消去了信号中的较小的变化，可以检测出信号中较大的变化，这刚好是对小波分解中低频信号的检测。因此，对于不同大小的 s 值，可以得到不同尺度下的剧变点，这就是多尺度边缘检测，相当于小波分解后对不同频带的信号进行检测。

图 9.5 中画出了 $f(x)$、$f*\theta_s(x)$、$W_s^{\mathrm{I}}f(x)$ 和 $W_s^{\mathrm{II}}f(x)$，明显地指示了函数的突变点位置和模极大值点的关系。其中 x_0、x_2 是 $|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\theta_{2^j}*f(x)|$ 的极大值点，x_1 是极小值点，分别对应

原信号 $f(x)$ 的剧变点和缓变点 而 x_0、x_1、x_2 都是 $\frac{d}{dx}\theta_{2^j} * f(x)$ 的零交叉点，图中 $s=2^j$ 是二进尺度。

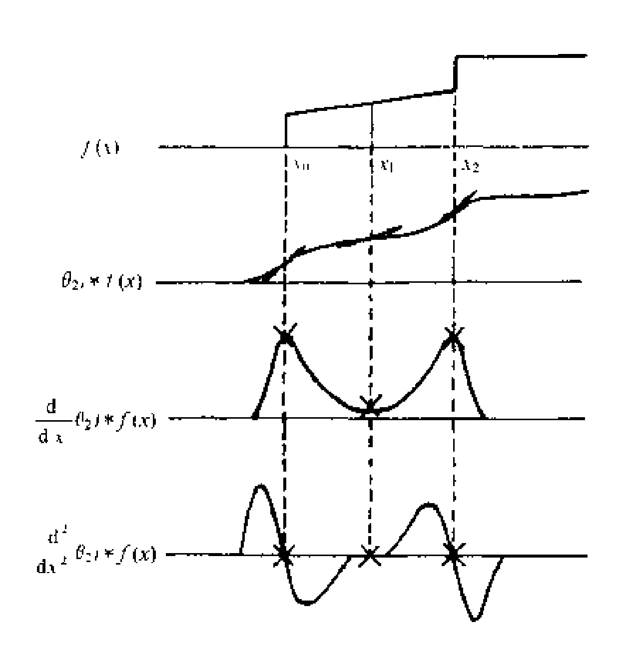


图 9.5 小波变换奇异性检测应用示意图

二、重叠地震记录的分离

重叠地震记录分离是地震信号处理中一个尚未解决的问题。如核幔界面的 PKS 震相与 P 震相的重叠。随着地震学的发展，需要将重叠震相分离开。又如大地震震源破裂过程，一般都是由两次以上的破裂构成，如何将两次破裂的重叠记录在时间域里分离开，对震源物理研究有重要意义。重叠爆破是核隐蔽技术之一。因此重叠地震记录的分离是识别核爆破与地震的重要方法之一。

重叠地震记录分离有两个关键问题，其一是两次事件之间的时间差，另一个是对两次事件的物理约束条件（如能量比、最大振幅比等等）。首先确定两次事件的时间差，这就解决了问题的一大半，再加上物理约束即可得到分离后的时域曲线。由于小波变换在时域和频域都具有很好的局部性质，因此是确定两次地震事件时间差的很好方法。图 9.6 给出了模拟重叠地震记录曲线。图中 A 是一次工业爆破的地震记录；B 是将 A 曲线强度缩小两倍，并提前 200 ms（20 个采样点）；C 是 A 曲线和 B 曲线叠加结果。叠加的曲线 C 发生了波形畸变，且最大振幅变小了，从而起到了隐蔽强度的作用。为了将重叠曲线进行分离，首先确定两个事件的时间差。采用小波包分析处理图 9.6 中的曲线 C。图 9.7 是小波包分析结果，图中明显地给出了两个事件的时间差 Δt 为 20 个采样点。这是小波变换在地震信号处理中成功应用的例子。有了两个事件时间差后，进一步处理还需其它信号处理方法。这里就不再叙述。

三、地震与核爆破的识别

频谱分析在核爆与地震识别中有广泛的应用。前人采用的频谱分析方法都是稳态方法，即使采用盖博变换，也因时-频窗口形状不变，因而分辨率较低。本书采用小波变换，充分利用小波的数学显微镜特点，提取频谱识别的新判据。

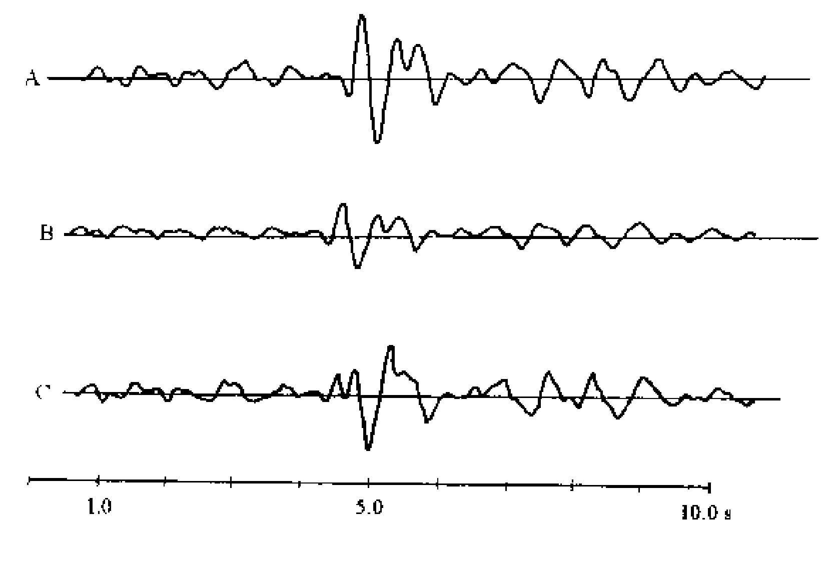


图 9.6　小波变换应用于重叠地震记录分离示例之一

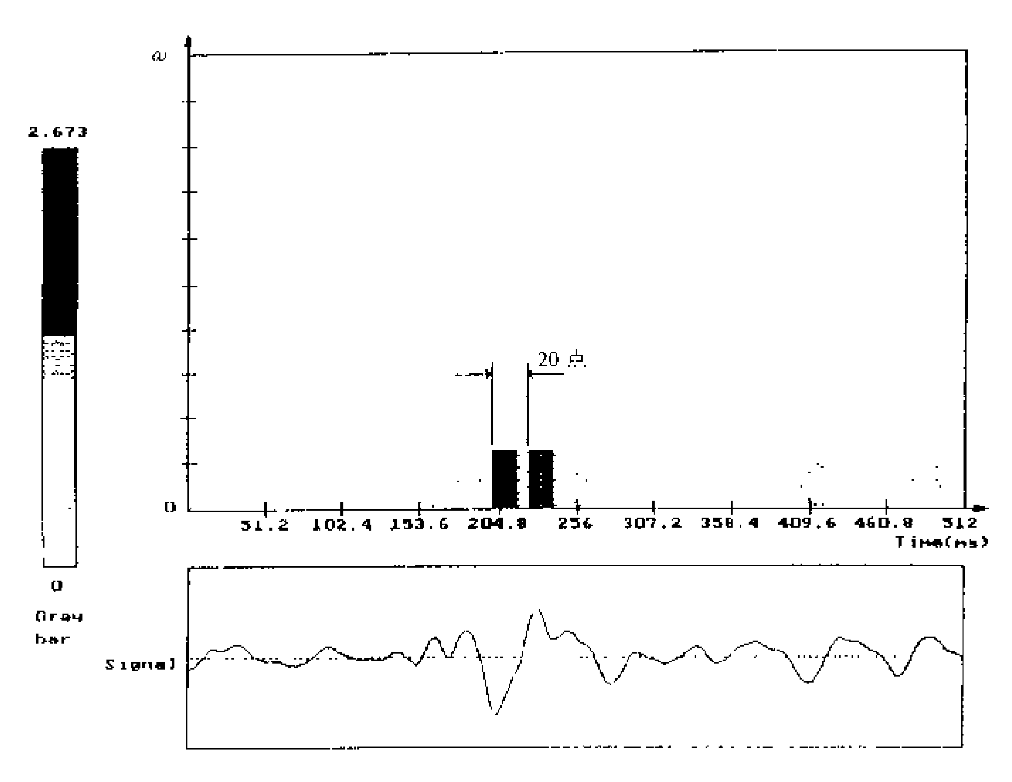


图 9.7　小波变换应用于重叠地震记录分离示例之二

1. 小波包分量比方法

在二进小波分析中，对信号是按二分法向低频方向进行分解的。一般对地震信号来说，这种分析方法已经足够了，因为地震信号的能量主要集中在低频段，通过对低频端信号的分析，就可以了解信号的频谱分布信息。但高频部分也包含了某些细节的信息，对于寻找信号的特征是必不可少的。因此对于核爆记录来说，由于核爆与地震的震源机制不同，其频谱的分布特征与地震的肯定会不一样。我们有必要再对信号的高频部分进行更详细的分析，以找

出地震信号与核爆记录之间的差别.

（1）小波信号分解的特点。

只对信号的低频部分进行分解，而没有对信号的高频段继续进行分解，这样信号在高频端的分辨率就比较低，信号中所包含的有意义的细节我们就无法看到，一般情况下，对信号进行这种方式的分解已经足够，但在地震与核爆识别的情况中，按小波分解来分析二者，就可能达不到有效识别的目的。小波分解的示意图如图 9.8 所示。

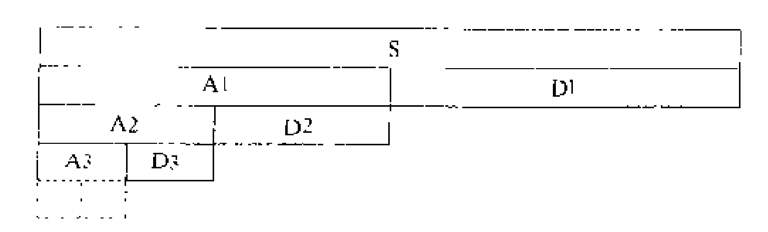


图 9.8　小波信号空间分解示意图

在图 9.8 中，S 表示原信号， A1、A2…表示信号的近似（低频）部分，D1、D2…表示信号分解中的细节（高频）部分，从图中可以看到，小波分解只对近似（低频）部分进行了二进方式的频率分解.

（2）小波包信号分解的特点。

与小波方法不同，小波包方法不仅对信号的低频部分进行分解，而且将信号的高频部分也按二进方式进行分解。这就是说，小波包分解可以把信号按频带分得更细，我们就可以了解到信号中所包含的更多的细节信息，在地震与核爆识别中，由于两者的机制不同，除了在低频端两者所包含的信号特征可能有差别外，在高频段，二者可能也存在不一样的特征，在小波分析中难于发现的差别，通过小波包分析，我们就有可能找出两者的不同特性来，从而成为我们识别地震与核爆的一个标志。小波包分解的示意图见图 9.9.

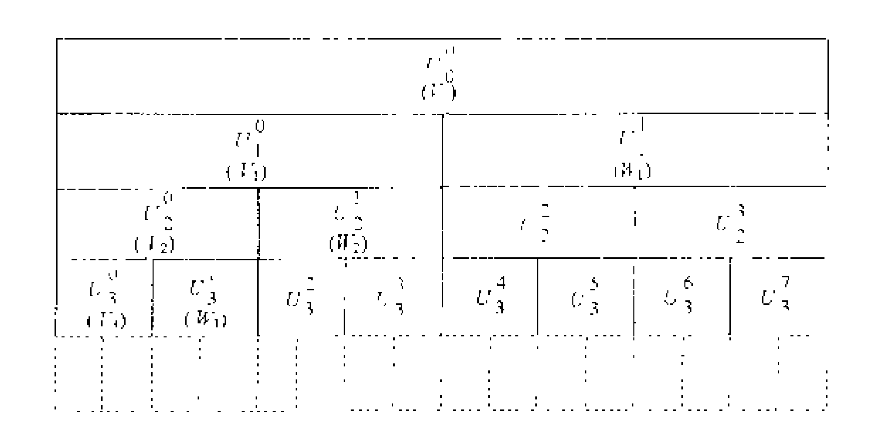


图 9.9　固定尺度小波包信号空间分解示意图

图 9.9 表示小波包分解是按二进尺度对信号在频域中进行分解，U_0^0 表示输入信号，将其进行一次（$j=1$）分解，得到低频段（U_1^0）和高频段（U_1）信号，再对 U_1^0 和 U_1^1 进行一次（$j=2$）分解，则得到 U_2^0、U_2^1、U_2^2、U_2^3，它们分别占据信号频率从低到高的四分之一的频带，如果继续往下分解，就可以得到更细的频带，从而得到信号在各个更细的频带内的分

布情况，找到不同性质的信号之间的区别。核爆与地震的源的性质不同，在各个频带上其能量分布就有可能不同，据此，我们就能够利用小波包的这一特性来为地震与核爆的识别提供依据。经过实验，我们发现地震与核爆的频域分布的确存在明显的差别，下面具体分析地震与核爆的频域分布情况。

2. **地震信号的小波包分量比**

为了分析地震信号的小波包分量比，我们先选取新疆乌鲁木齐（WMQ）台站记录的 7 个哈萨克斯坦的地震来研究，7 个地震的情况列于表 9.1，数据长度取 P 波段记录的 512 个点，波形曲线见图 9.10。需要说明的是，所取数据均是垂直向记录，采样率为 20 点/s。

表 9.1 7 个哈萨克斯坦的地震事件参数

事 件	日 期	时间（UTC）	纬度 φ_E(°)	经度 λ_N(°)	深度/ km	震级 m_b
9006141z	1990-06-14	12:47:17.2	47.91	85.07	54	7.3
9006142z	1990-06-14	14:18:10	48.00	85.01	40	5.3
900803z	1990-08-03	09:15:03.6	48.04	84.98	21	6.1
900927z	1990-09-27	21:12:31.6	48.06	85.06	30	5.3
901112z	1990-11-12	12:28:52.5	42.96	78.00	33	6.6
910819z	1991-08-19	06:05:52.8	47.08	85.40	47	5.6
940525z	1994-05-25	07:43:00.6	40.90	63.48	30	5.4

采用 9 阶的 Daubechies 小波基，对每个曲线进行小波包分解，在 $j=3$ 时，我们发现地震与核爆的小波包分解系数之间的差别就很明显（7 个地震事件在尺度为 3 时的小波包分解图如图 9.11 所示）。因此，我们这里只分析尺度为 3 时的小波包分解系数之间的情况。我们把各段系数的平方和作为该段信号的能量，把小波包分量比定义为信号在各个频带的能量之比，这里，我们拟定 U_3^0/U_3^1、U_3^0/U_3^3 两组比值来进行分析，其中 U_3^0/U_3^1 表示频带为 0~1.25Hz 的信号与频带为 1.25~2.5Hz 信号的能量之比，U_3^0/U_3^3 则表示 0~1.25Hz 的信号与 3.75~5.0Hz 的信号的能量比。在取 P 波段数据长度分别为 64、128、256 和 512 的情况下，7 个地震的小波包分解系数之间的能量比（小波包分量比）如表 9.2 所示。

表 9.2 WMQ 台站记录的 7 个哈萨克斯坦地震的小波包分量比

比值 / 事件	U_3^0/U_3^1				U_3^0/U_3^3			
	64	128	256	512	64	128	256	512
9006141z	2.7420	3.7199	10.5000	5.7335	3.4530	4.8356	20.8098	30.4181
9006142z	0.3041	0.2749	0.3509	1.0510	0.9306	0.7497	0.6531	4.5878
900803z	0.8094	0.8789	2.1790	1.7664	3.6081	3.1636	12.5235	14.2489
900927z	0.6725	0.4520	1.2079	1.1955	2.0951	1.4228	5.3301	4.7095
901112z	21.3120	33.8943	24.253	21.0972	33.6695	88.1416	196.153	162.42
910819z	2.5645	12.4514	6.2890	6.6067	23.0113	45.4761	33.6599	33.6735
940525z	1.3257	1.7981	2.4981	2.6687	3.9855	14.3694	19.2819	21.8477

从表 9.2 可以看出，地震事件的比值U_3^0/U_3^1、U_3^0/U_3^3几乎都大于 1.0，只有对于 9006142z 在样点数为 64 、128 和 256 时这两个比值小于 1.0，及 900927z 在样点数为 64、128 时比值U_3^0/U_3^1小于 1.0，但在样本点为 512 时，所有比值均大于 1.0。表明对地震记录，信号在低频端的能量大于高频端的能量。

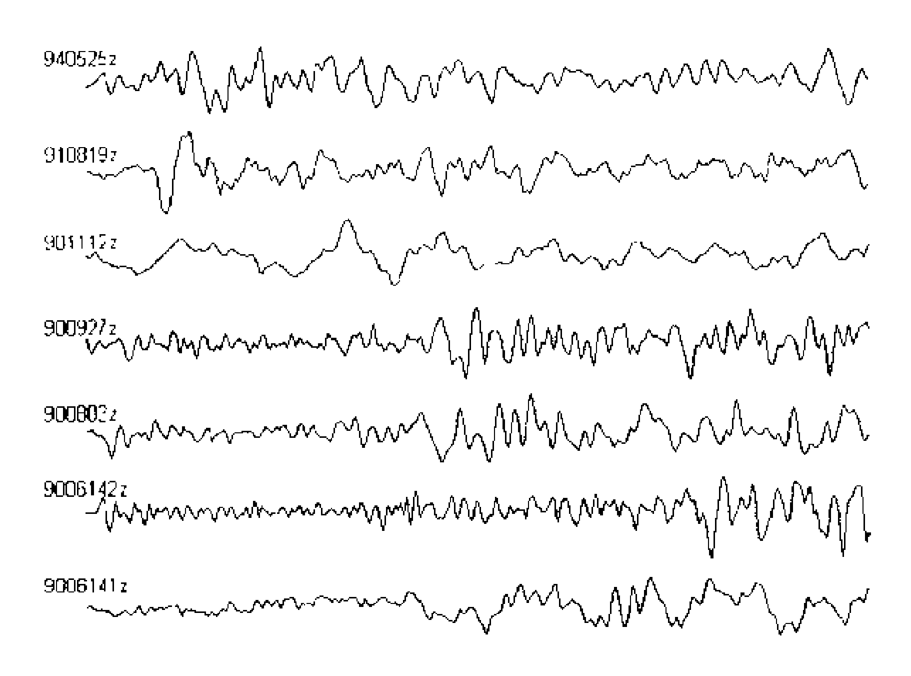


图 9.10 哈萨克斯坦 7 个地震记录曲线

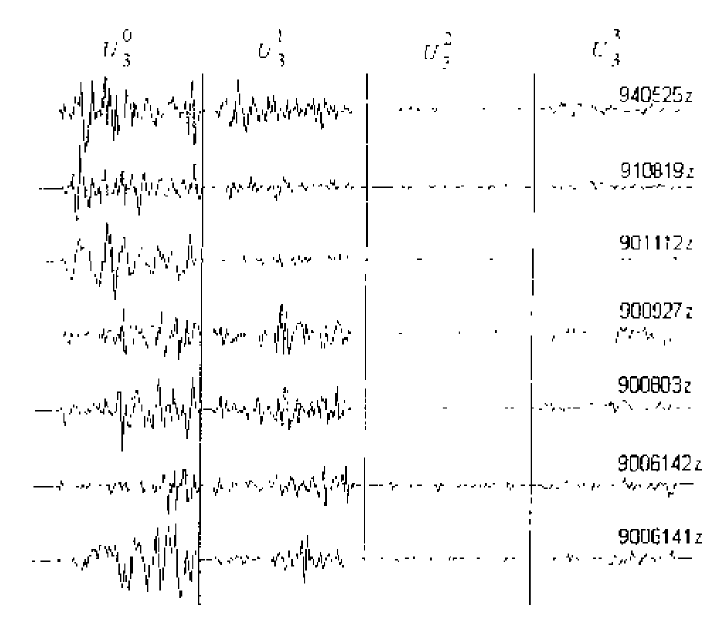


图 9.11 7 个地震事件在尺度为 3 时的小波包分解

3. **核爆记录的小波包分量比**

为了与地震信号的小波包分析结果进行比较，选取乌鲁木齐台站记录的前苏联在哈萨克斯坦进行 5 个核试验的记录来分析，这 5 个核爆事件与以上的地震发生在几乎同一地区，见表 9.3。

表 9.3　哈萨克斯坦 5 个核试验记录参数

事　件	日　期	时　间	纬度 φ_E(°)	经度 λ_N(°)	震级 m_b
H870312z	1987-03-12	01:57:17.2	49.90	78.83	5.6
H870606z	1987-06-06	02:37:07	49.80	78.09	5.4
H870717z	1987-07-17	01:17:07	49.77	78.10	5.8
H871227z	1987-12-27	03:05:03.8	49.82	78.73	6.1
H880914z	1988-09-14	03:59:56.6	49.81	78.80	6.1

这 5 个核试验记录的波形曲线见图 9.12 所示，仍分别取 P 波段的 64、128、256 和 512 个数据来分析。5 个核爆事件在尺度 $j=3$ 下的小波包分解系数如图 9.13 所示。

与地震事件对应，这 5 个核爆事件的小波包分量比结果如表 9.4 所示。

表 9.4　5 个核爆事件的小波包分量比

比值 / 事件	U_3^0/U_3^1				U_3^0/U_3^3			
	64	128	256	512	64	128	256	512
H870312	0.3869	0.3363	0.2193	0.0933	0.1604	0.0643	0.0791	0.0921
H870606	1.7647	1.0465	0.7977	0.7079	1.1085	0.3941	0.3381	0.3272
H870717	1.0530	0.6255	0.5815	0.3251	1.0059	0.4626	0.2593	0.2535
H871227	1.4783	1.1179	0.8239	0.4027	1.2869	0.7184	0.8880	0.8081
H880914	1.3859	0.9606	0.4522	0.2426	0.4243	0.3377	0.3549	0.3621

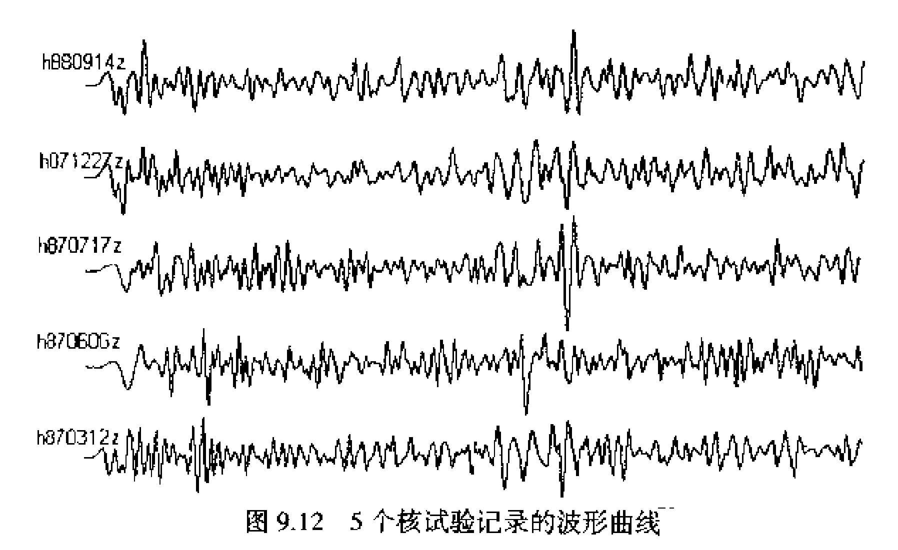


图 9.12　5 个核试验记录的波形曲线

从表 9.4 可以看出，当取样为 64 点时，有四个核爆事件的 U_3^0/U_3^1 比值、三个 U_3^0/U_3^3 比值大于 1.0；当取 128 点时，仅有两个 U_3^0/U_3^1 比值略大于 1.0；而在取样点为 256 和 512 时，所有比值均小于 1.0。与表 9.2 比较，我们能够看出，地震信号的小波包分量比值明显比核爆信号的要大，这说明地震信号能量是低频端大于高频端．而对核爆记录，信号在低频端的能

量小于高频端的能量。

从图 9.11 与图 9.13 上也能看出，对于地震，U_3^0所对应的频带集中的能量比U_3^1的大；而对核爆事件，U_3^0所对应的频带集中的能量却比U_3^1的小。现在我们将 $N=512$ 时地震与核爆的小波包分量比分别以比值的对数（自然对数）为纵坐标，按比值从小到大作图，结果如图 9.14 所示，图中横坐标为事件序号。

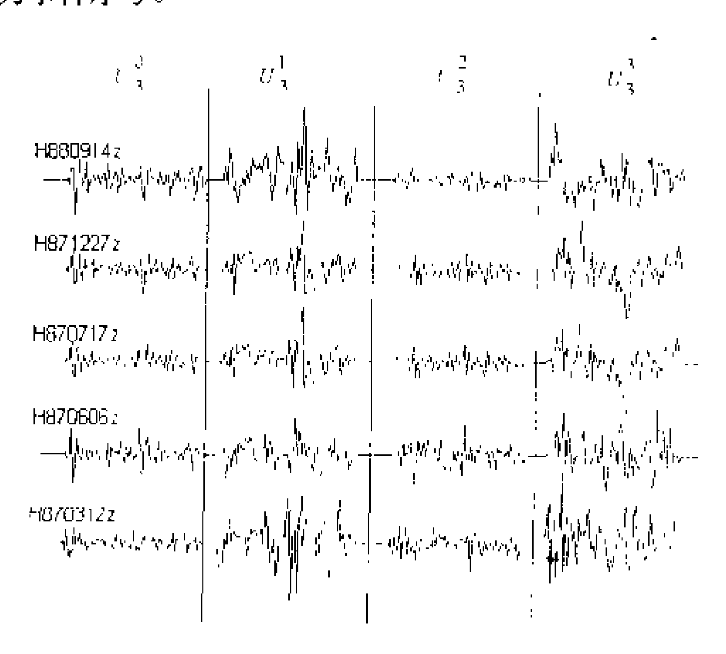


图 9.13　5 个核爆事件在尺度 $j=3$ 下的小波包分解

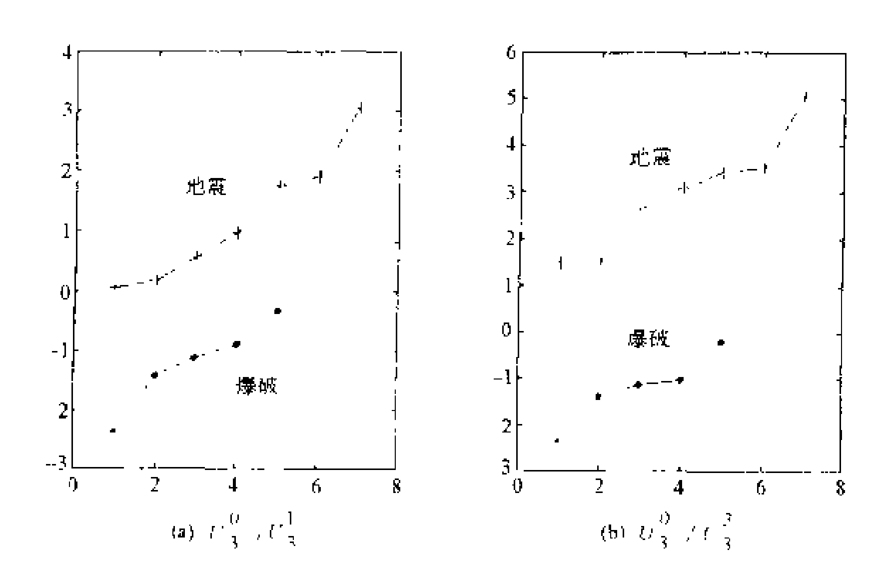


图 9.14　地震与核爆事件小波包分量比比较示意图

纵坐标为事件小波包分量比，横坐标为事件序号

从图上能够清楚地看出，地震信号的小波包分量比值几乎都大于核爆的分量比值。这是小波分析在地震与核爆识别应用中成功的例子。

第二部分　小波变换 MATLAB 工具的应用

小波变换的 MATLAB 工具箱有多种版本，具有强大的处理资料的功能。综合多种版本，本节仅介绍最基本的一些功能。读者在采用小波变换进行研究工作之前，先浏览一下 MATLAB 工具中的一些应用，对你将进行的资料处理会有一定的启发。书中给出的各种操作在不同版本下可能稍有差异，但基本思路和内容是相同的。

第十章　小波变换的 MATLAB 工具箱

§10.1　一维连续小波分析

本节采用 MATLAB 小波工具箱，介绍一维小波分析的特性。

使用小波工具箱进行一维小波分析，只需要一个函数：cwt。在本节你将学会：

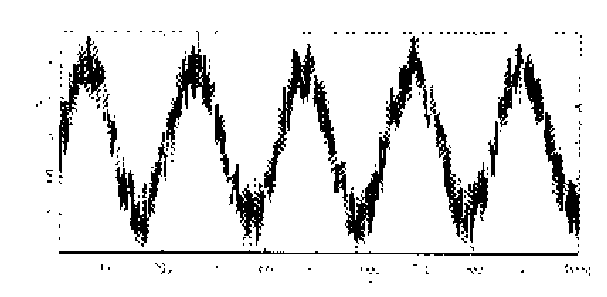
- 加载信号；
- 对信号进行连续小波变换；
- 画出系数曲线；
- 对细节部分进行缩放；
- 按普通或绝对值方式显示系数；
- 选择小波分析的尺度。

你既可以在命令行方式下，也可以在图形界面方式下对信号进行小波分析，本节对这两种方法都将予以介绍。

最后将介绍如何在图形界面下将信号与分析结果保存到磁盘上。

一、命令行方式连续小波分析

首先是加载信号，例子信号是一个包含随机噪声的正弦信号，如下图所示：



（1）在 MATLAB 提示符状态下，输入：

〉〉 load noissin；

这时，信号 noissin 就被加载到你的工作空间里面了。数据以数组形式存在，键入下面的命令就可以查看信号的信息：

〉〉 whos

Name	Size	Elements	Bytes	Class
Noissin	1 by 1000	1000	8000	double array

（2）使用 cwt 命令。输入：

〉〉 c=cwt（noissin，1:48, 'db4'）;

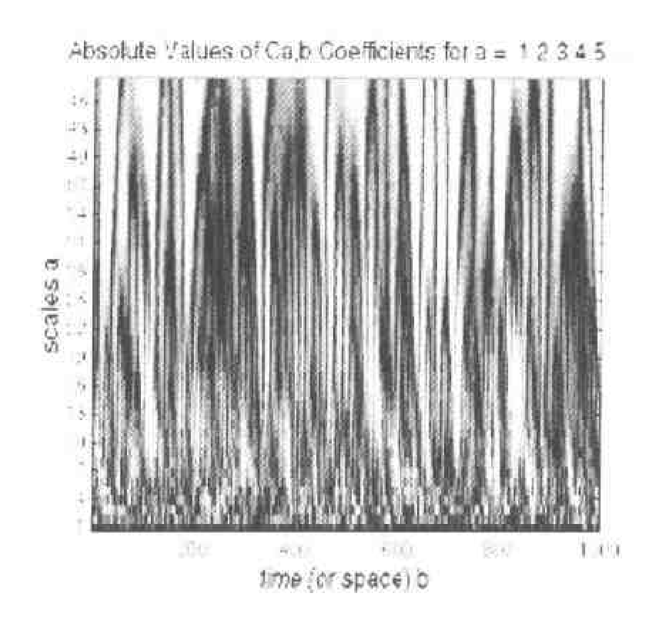
函数包括了三个参数：所要分析的信号、分析的尺度范围及采用的小波类型。输出参数 c 为不同尺度下的小波系数。对上面的情况，c 为一 48×1000 的矩阵，每一行对应于一种尺度下的小波系数。

cwt 命令可以有第四个参数。这是一个标志性参数，如果输入这个参数，cwt 命令就可以绘制出连续小波变换得到的小波系数图形。

（3）输入以下命令：

〉〉 c=cwt（noissin, 1:48, 'db4', 'plot'）;

结果就会输出一个如下所示的图形。



当然，上面由命令行方式得到的系数图还可以由通常的图形命令实现。通过下面的命令，可以将上面图像的颜色图由缺省的 cool 类型变为 pink（粉红色）：

〉〉 colormap（pink）

这里，需要注意的一点是分析尺度的选择：

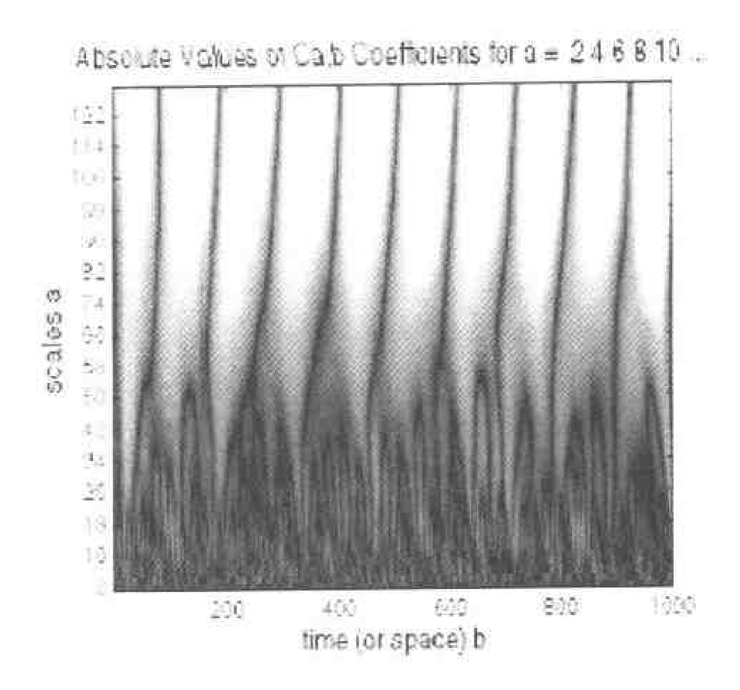
cwt 第二个参数可以使你调节连续小波分析的尺度水平。在前一个例子当中，我们使用的尺度是从 1 到 48，但你可以构建满足如下条件的任意的尺度矢量：

- 所有尺度必须是实的正整数；
- 尺度初值必须为正；
- 尺度的增量必须为正；
- 尺度的最大值不能超过与信号有关的最大值。

（4）下面我们使用 2 到 128 的尺度指标重复上面的例子。输入：

〉〉 c=cwt（noissin, 2:128, 'db4', 'plot'）;

下面就得到一个新的图形：



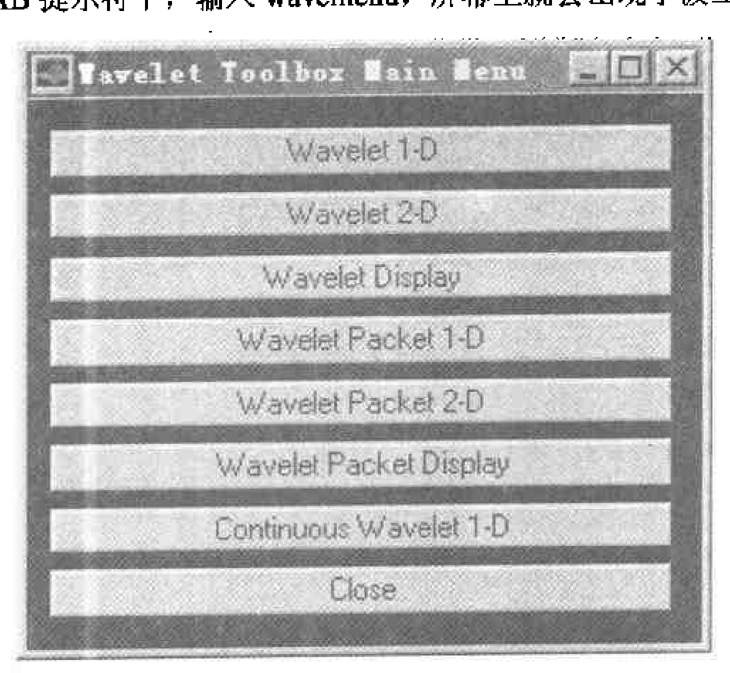
这个图给出了信号变化更清晰的图像，周期性更明显。

二、图形界面方式进行连续小波分析

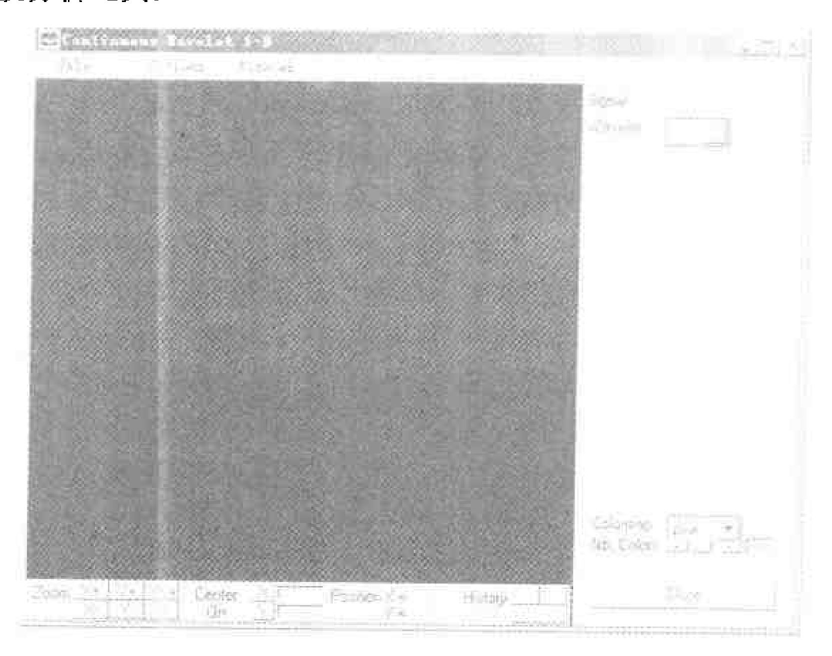
现在我们利用一维连续小波（Continuous Wavelet 1-D）图形界面方式来分析前面用命令行方式分析过的噪声正弦信号。

● **启动一维连续小波工具**

（1） 从 MATLAB 提示符下，输入 wavemenu，屏幕上就会出现小波工具箱主菜单：



（2）鼠标左键点击一维连续小波（Continuous Wavelet 1-D）菜单项，屏幕上就会弹出一维信号连续小波分析工具：



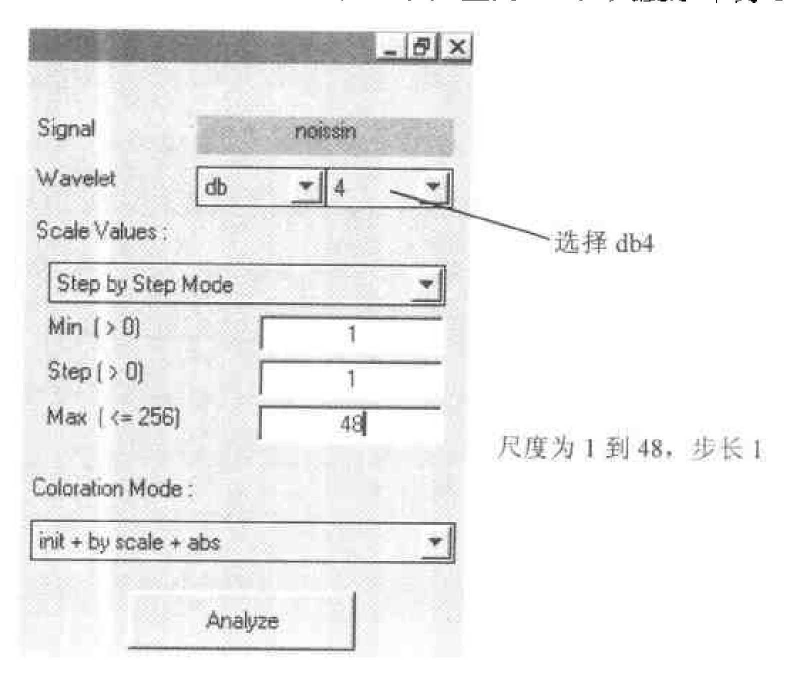
（3）选择 File=>Load Signal 菜单项，调入一个信号数据；

（4）当 Load Signal 对话框出现时，选择文件 noissin.mat，该文件应该位于 MATLAB 目录下的 toolbox\wavelet\wavedemo 子目录中，单击 OK 按钮，噪声正弦信号就被调入一维连续小波工具中了。

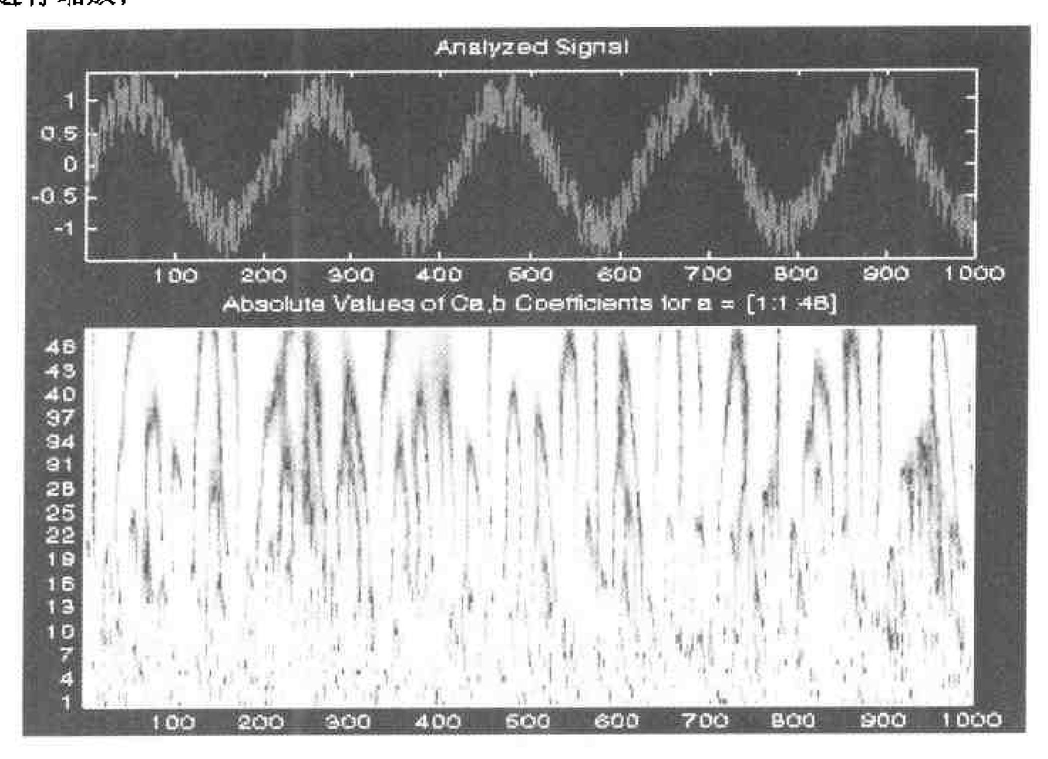
● **连续小波变换**

正如前一节命令行方式一样，我们采用 db4 小波、尺度由 1 到 48 进行小波分析。

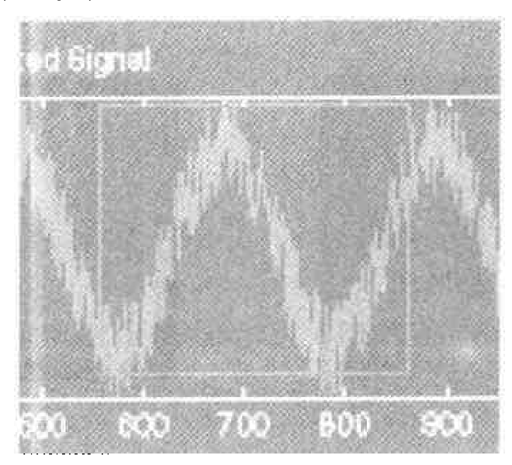
（5）在一维连续小波工具的右上部，选择小波类型为 db4，尺度水平为 1~48。



（6）单击 Analyze（分析）按钮，经过一会儿的计算，屏幕上绘出系数图，可以对图形的细节进行缩放；



（7）按住鼠标左键在信号框内拖放画一个方框，框住需要放大的信号部分；

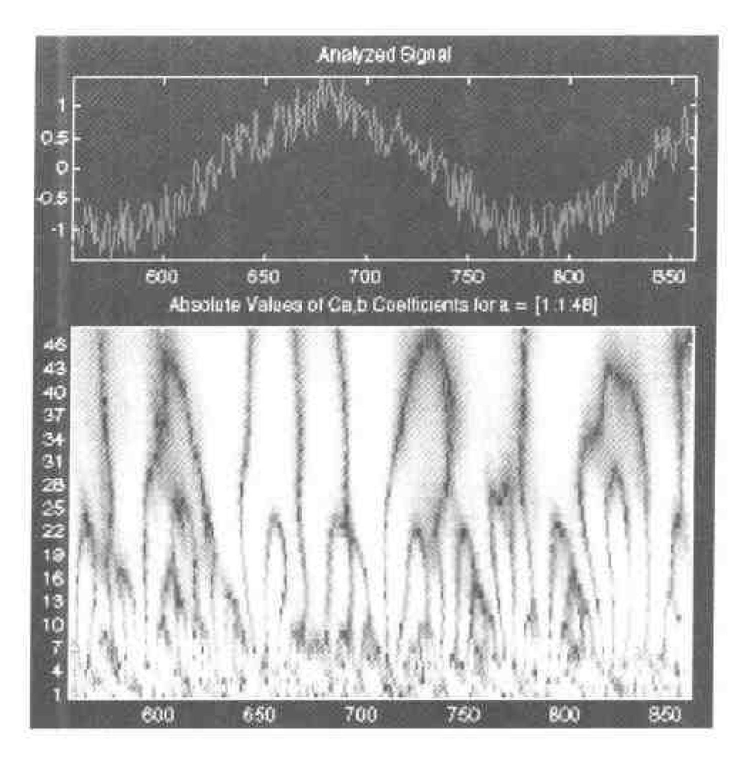


（8）单击 X+按钮（位于屏幕下方）就可以对信号与系数图进行水平放大；

Zoom X+ Y+ XY+ X- Y- XY- Center On X Y Position X= Y= History

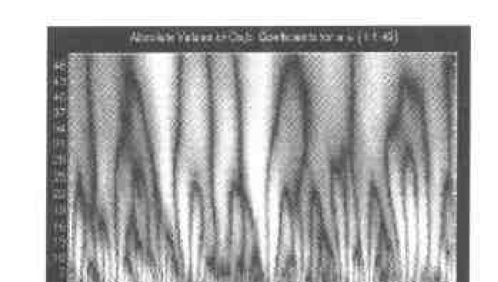
正如前面采用命令行方式进行分析一样，你也可以选取不同的分析尺度和小波类型，并重新进行计算。要这样做，你只需编辑需要改变的项，然后单击 Analyze 按钮；

● **常规或绝对值系数**

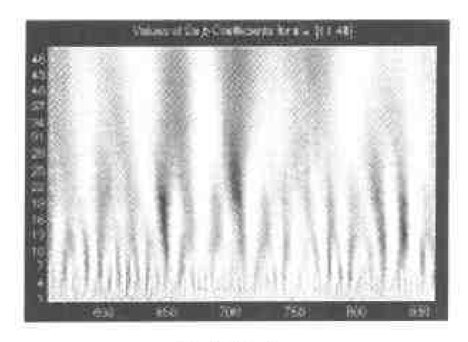


一维连续小波工具能够以小波分析系数的绝对值作图，也可以直接以小波系数本身作图。

（9）从位于 Analyze 按钮上方的 Coloration Mode（着色模式）菜单中可以选择 Absolute Mode （绝对模式）或 Normal Mode（常规模式）。在常规模式下，颜色的尺度范围在系数的最小与最大值之间。在绝对值模式下，颜色的尺度范围在 0 到系数的最大值之间。两种模式下的系数图重新显示如下：



绝对模式



常规模式

三、在图形界面方式下导入导出信息

通过一维连续小波图形工具，你可以从磁盘导入资料，或将信息导出到磁盘上。

● **将信号调入一维连续小波图形工具**

为了把你在 MATLAB 工作空间构造的信号调入图形工具，你首先必须将信号变量以相同的名称保存为 MAT 类型文件。

例如，假如你已设计了一个信号 warma 并想在图形工具中分析它，就必须：

```
>> save warma
```

工作空间变量 warma 必须是一个矢量，通过函数 size 可以确定矢量的大小：

```
>> sizwarma = size (warma)
```

```
sizwarma =
            1         1000
```

表明变量 warma 是一个一维矢量，包含 1000 个数据元素。

通过菜单选项 File=>Load Signal，出现一个对话框，列出了适当的 MAT 文件，从中就可以把这个信号调入图形工具。

- **保存小波系数**

在一维连续小波工具下，你可以把小波系数保存到磁盘的当前工作目录下，并且工具箱给出了保存文件的扩展名为 wc1。

为了保存当前分析的小波系数，选取菜单项 File=>Save Coeffients，这时弹出一个对话框，让你确定保存系数的目录和文件名。

考虑如下的演示分析例子：

File=>Demo Analysis=>with haar at scales [1:1:64]——▶ Cantor curve。

在把这个连续小波分析系数保存为 cantor.wc1 之后，再把这个变量调入工作空间。

```
>> load cantor.wc1  -mat
>> whos
   Name       Size          Elements     Bytes       Class
   coefs      64 by 2188    140032       1120256     double array
   scales     1 by 64       64           512         double array
```

变量 coefs 和 scales 分别是小波系数及对应的尺度数组。在上面这个例子中，coefs 是 64×2188 的矩阵，每一行对应一个尺度系数，而 scales 为 1:64 的矢量。

§10.2 一维离散小波分析

本节介绍采用 MATLAB 工具箱进行一维离散小波分析的特点。小波工具箱为一维信号分析提供了以下一些函数：

（1）小波分解与重构函数：

分解函数	功　能
Dwt	单步分解
Wavedec	小波分解

重构函数	功　能
idwt	单步重建
waverec	完全重建
wrcoef	选择性重建
upcoef	单一重建

（2）分解结构应用：

函数名	功　能
Detcoef	提取细节部分的系数
Appcoef	提取近似部分的系数
Upwlev	分解结构的重组

（3）去噪函数：

函数名	功　　能
ddencmp	为信号去噪及压缩提供缺省值
wdencmp	小波方法去噪及信号压缩
upwlev	自动小波去噪

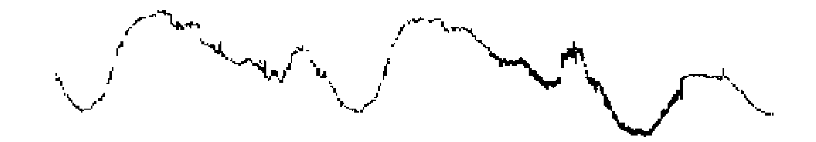
在这一节，你将学到怎样：

- 加载信号；
- 对信号进行单级小波分解；
- 从系数构建近似与细节部分；
- 显示近似与细节部分；
- 由小波逆变换重建信号；
- 对信号进行多级小波分解；
- 提取系数中的近似及细节；
- 重建3级尺度下的近似信号；
- 重建1、2及3级尺度下的信号细节；
- 显示多级尺度分解的结果；
- 从3级尺度分解系数重建原信号；
- 去除噪声；
- 信号压缩；
- 显示信号统计与柱状图。

我们既可以在命令行方式下、也可以在图形界面工具方式下进行分析，因此，本节将对二者分别进行介绍。最后一小节讨论在图形工具与磁盘之间，如何交换信号与分析系数等信息。

一、命令行方式一维小波分析

本例为一真实的物理信号——实际测得的三天时间的电耗。这个信号十分有趣，因为在测量过程中，由于监测仪器的误操作引进了噪声。小波分析有效地去除了这个噪声。



（1）首先加载要分析的信号。从MATLAB提示符下，输入：

》load leleccum;

（2）设置变量：

》s=leleccum（1：3920）;

》ls=length（s）;

（3）对信号进行单步小波分解。采用db1小波进行单步小波分解。输入：

》[cA1，cD1]=dwt（s，‘db1’）;

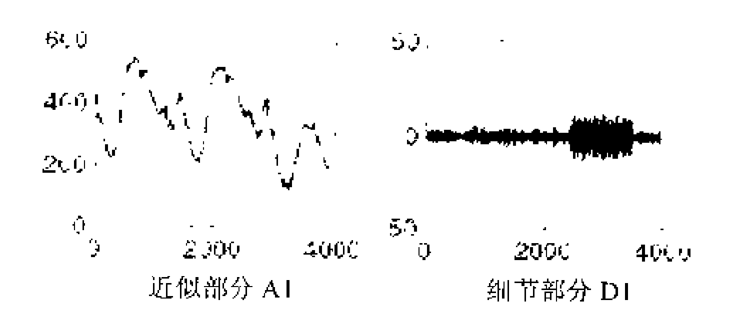
这样就得到了信号在尺度为1时小波分解的近似部分（cA1）和细节部分（cD1）

（4）从分解系数构建近似部分与细节部分。为了从系数cA1和cD1构建近似部分与细节部分（A1及D1），输入：

```
>> A1=upcoef（'a'，cA1，'db1'，1，ls）;
>> D1=upcoef（'d'，cD1，'db1'，1，ls）;
```

（5）显示近似部分与细节部分图形。为了显示尺度1的分解结果，输入：

```
>> subplot（1，2，1）; plot（A1）; title（'近似部分A1'）
>> subplot（1，2，2）; plot（D1）; title（'细节部分D1'）
```



说明：subplot（m，n，i）的三个参数中，第一个参数表示图件在画面上分m行显示，第二个参数表示图件在画面上分n列显示，这样，在一个画面上最多可显示m×n个图件，第三个参数表示某个图件在画面上的索引序号，图件的排列顺序是从左到右、从上到下进行的，索引起始序号为1。

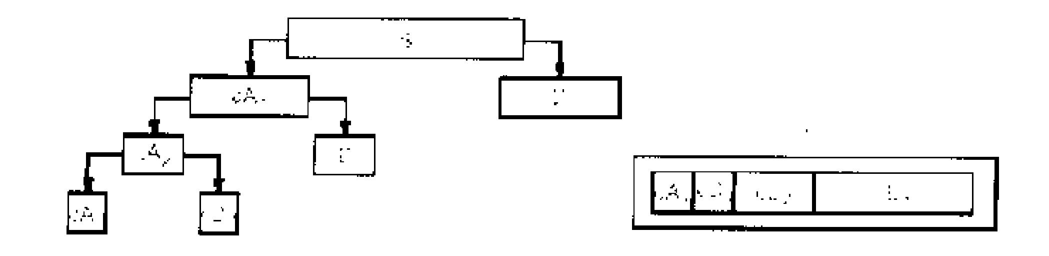
(6) 逆小波变换重建信号。逆变换函数执行如下：

```
>> A0=idwt（cA1，cD1，'db1'，ls）;
```

(7) 上面我们只对信号作了一次分解，还对信号进行多尺度小波分解。为了完成信号在尺度3下的小波（仍然用db1小波）分析，输入：

```
>> [C，L]=wavedec（s，3，'db1'）;
```

这样，尺度水平为3时所有分解单元（即第三级近似与原先的三个细节）系数保存在矢量C中了，矢量L分别对应每个系数单元的长度。



（8）提取近似部分与细节部分系数。为了从C中提取第三级近似部分系数，输入：

```
>> cA3=appcoef（C，L，'db1'，3）;
```

（9）为了从C中提取尺度为3、2、1时的细节系数，输入：

```
>> cD3=detcoef（C，L，3）;
```

```
>> cD2=detcoef（C，L，2）;
>> cD1=detcoef（C，L，1）;
```

（10）重建尺度3水平下的近似部分系数。为了从C重建尺度3时的近似部分系数，输入：

```
>> A3 = wrcoef（'a'，C，L，'db1'，3）;
```

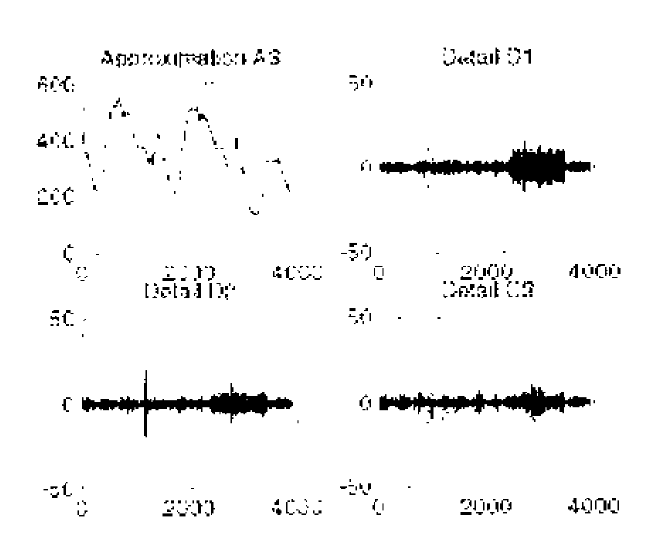
（11）重建尺度为1、2及3时的细节系数。为了由C重建尺度水平为1、2和3时的近似部分系数，输入：

```
>> D1 = wrcoef（'d'，C，L，'db1'，1）;
>> D2 = wrcoef（'d'，C，L，'db1'，2）;
>> D3 = wrcoef（'d'，C，L，'db1'，3）;
```

说明：函数 wrcoef 的第一个参数用于说明重建的是近似（'a' -Approximation）部分或是细节（'d' -Detail）部分系数。

（12）显示多尺度分解结果曲线。为了显示3级尺度分解结果，输入：

```
>> subplot（2，2，1）; plot（A3）; title（'Approximation A3'）
>> subplot（2，2，2）; plot（D1）; title（'Detail D1'）
>> subplot（2，2，3）; plot（D2）; title（'Detail D2'）
>> subplot（2，2，4）; plot（D3）; title（'Detail D3'）
```



（13）由三级分解重建原信号。为了从小波分解结构重建原信号，输入：

```
>> A0 = waverec（C，L，'db1'）;
```

- **信号粗去噪**

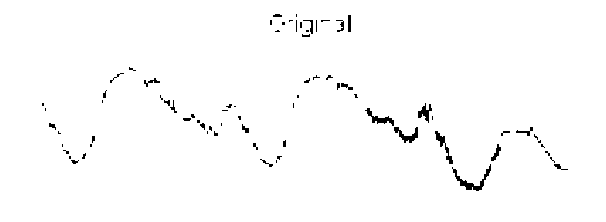
要利用小波方法从信号中去除噪声，必须要知道哪个或哪些分解成分中包含有噪声，然后才能从中剔除噪声重建信号。

本例中我们注意到，在连续的几个近似分量中，所包含的噪声愈来愈少，而愈来愈多的高频信息从信号中被除去了。

比较原信号与尺度水平为3时的近似部分，可以非常明显地看到这一点。

（14）为了比较原信号与小波分解的近似部分，输入：

```
>> subplot (2, 1, 1); plot (s); title ('Original'); axis off
>> subplot (2, 1, 2); plot (A3); title ('Level 3 Approximation'); axis off
```





当然，在去除所有高频信息的过程中，原信号也丢失了许多尖峰特征。理想的去噪方法需要更精细的方法——阈值法。该方法只去除细节分量中超过某一限定值的部分。

● **阈值法去噪**

让我们再来看一看在尺度水平 3 时的小波分析细节分量。

(15) 为了显示细节部分 D1、D2 和 D3，输入：

```
>> subplot (3, 1, 1); plot (D1); title ('Detail Level 1'); axis off
>> subplot (3, 1, 2); plot (D2); title ('Detail Level 2'); axis off
>> subplot (3, 1, 3); plot (D3); title ('Detail Level 3'); axis off
```



从细节信息中可以看到大部分噪声出现在信号的后半部分。如果我们对其最大值加以约束从而限定细节部分的强度，情况会怎样呢？这将可能产生这样的结果，即削减了噪声，而未受影响的细节部分却都保留了下来。但另外有一个较好的方法。

注意到 cD1、cD2 及 cD3 都只是 MATLAB 矢量，因此我们就可以直接操作每一个矢量，设置其每个元素的值为它们峰值或均值的分数。然后我们就可以从阈值系数重建新的细节信号 D1、D2 及 D3。

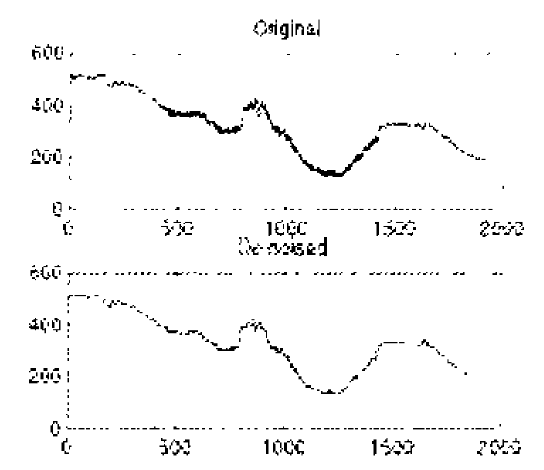
（16）为了去除噪声，利用 ddencmp 命令计算缺省参数，实际的噪声消除却是需要 wdencmp 命令，在 MATLAB 提示符下输入：

```
>> [thr, sorh, keepapp] = ddencmp ('den', 'wv', s);
>> clean = wdencmp ('gbl', C, L, 'db1', 3, thr, sorh, keepapp);
```

这里要注意到的是，需要把信号小波分解的结果（C 和 L）传递给函数 wdencmp，而 C 和 L 由第（7）步计算得到。对原始信号进行分析时采用了 db1 小波，全局阈值为 ‘gbl’。关于函数 ddencmp 和 wdencmp 的输入参数，请查阅这些命令的帮助。

（17）要显示原始信号与去噪后信号的曲线，输入：

```
>> subplot (2, 1, 1); plot (s (2000, 3920)); title ('Original');
>> subplot (2, 1, 2); plot (clean (2000, 3920)); title ('De-noised');
```



这里我们只画出了信号中包含噪声的后半部分。请注意是怎样去除掉信号中的噪声而未影响到原始信号中本身包含的尖峰细节信息。这就是小波分析的优势。

但使用命令行函数去噪显得比较麻烦，而小波工具箱的图形界面工具采用自动确定阈值的方法，使得小波方法去噪变得很容易。

二、图形界面方式一维小波分析

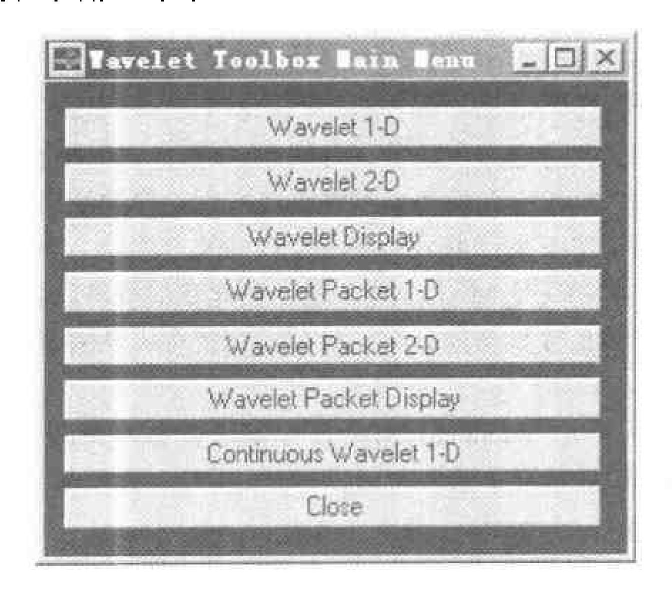
本节我们还是来分析上一节中分析过的信号，但是这里采用图形界面来分析信号。

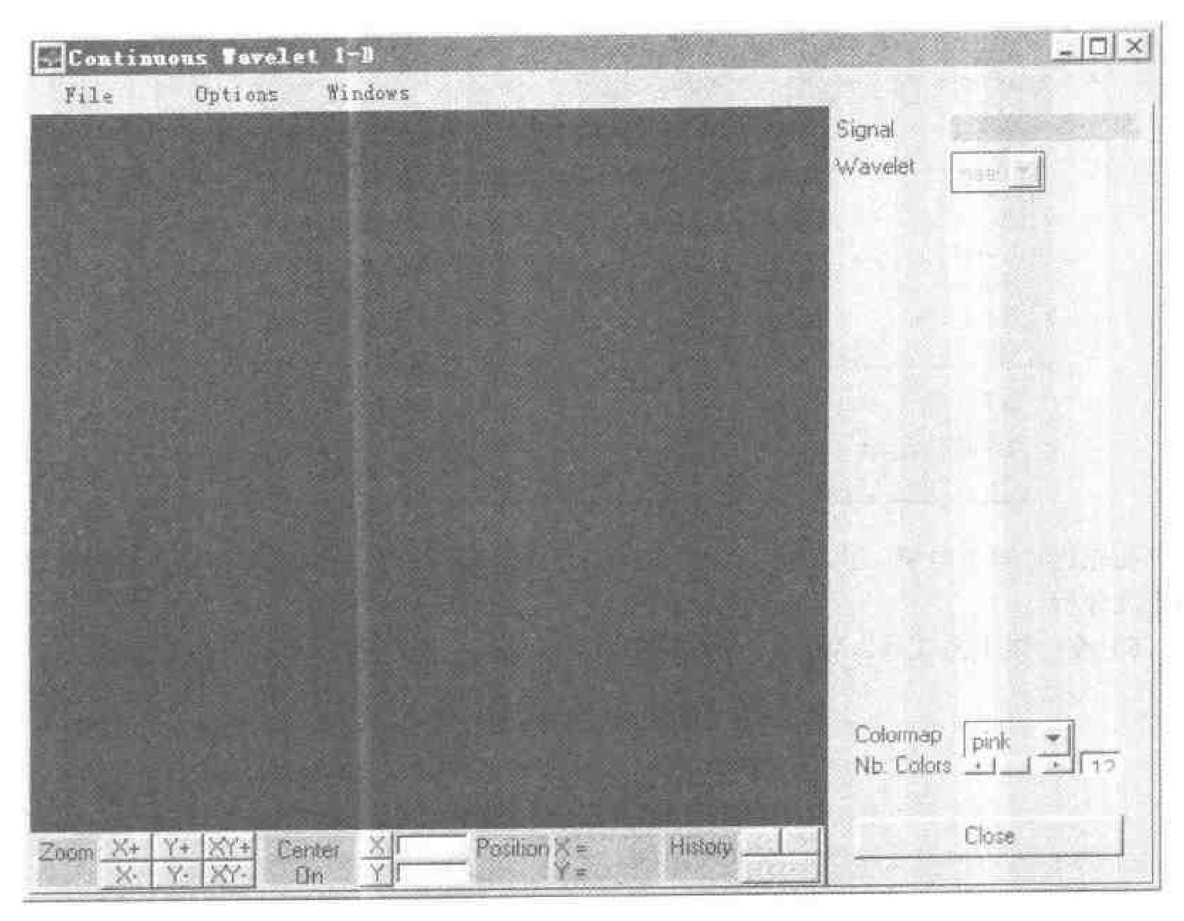
- **启动一维小波分析工具（1-D Wavelet Analysis Tool）**

（1）在 MATLAB 提示符下，输入：

```
>> wavemenu
```

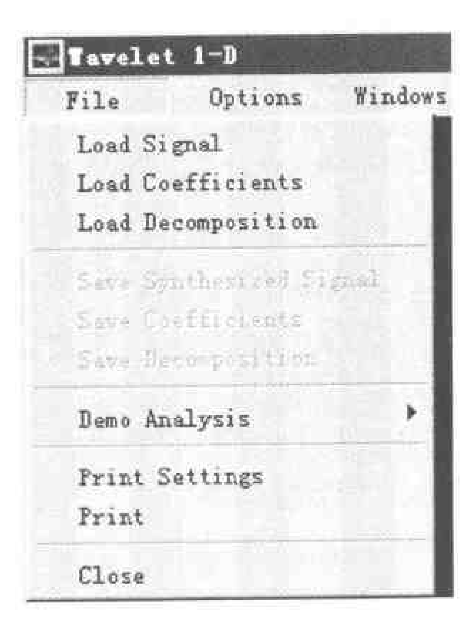
屏幕上弹出小波工具箱主菜单。





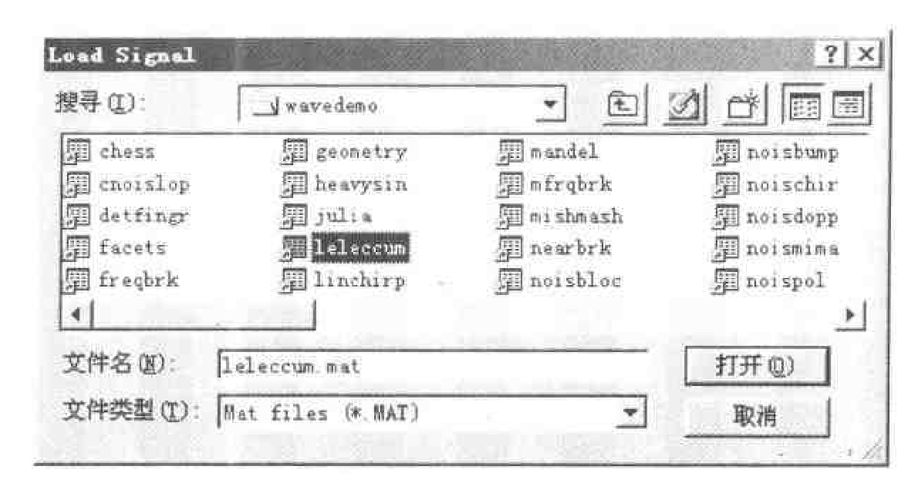
（2）鼠标左键点击 Wavelet 1-D 菜单项，屏幕上就会出现一维离散小波分析工具界面。接下来，就是要调入一个信号来分析。

（3）从 File 菜单中，选择 Load Signal（加载信号）子菜单项。



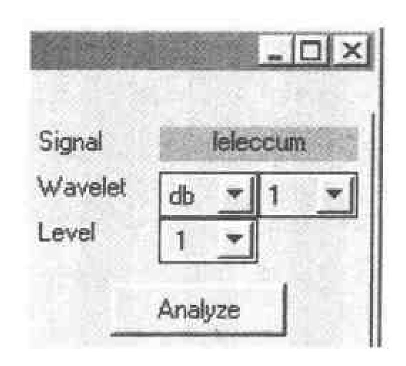
（4）当 Load Signal 对话框出现后，选择 MATLAB 目录下的 toolbox\wavelet\wavedemo

子目录中的文件 leleccum.mat。

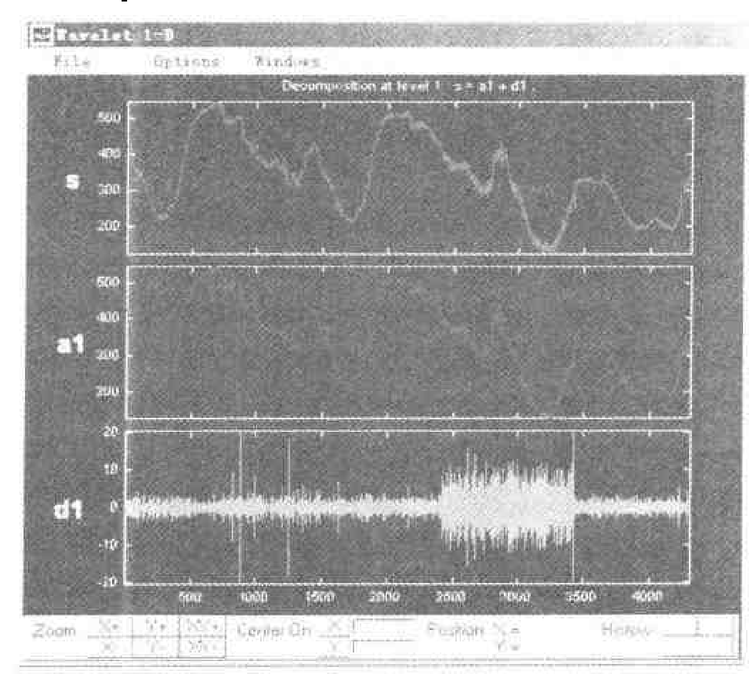


下面先进行单步分解。正如前面使用命令行方式一样，我们采用 db1 小波来进行一阶尺度的小波分析。

（5）在一维小波工具（Wavelet 1-D）右上角，选择小波类型为 db1，分解尺度为 1。



（6）单击分析（Analyze）按钮，经过计算之后，工具界面显示分解结果。



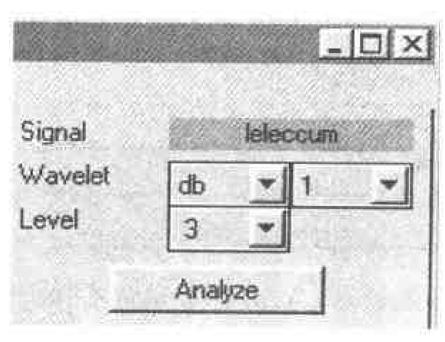
使用图形界面工具的一个好处就是我们可以很容易地对图形中任意感兴趣的部分进行缩放操作，这样就可以对信号放大进行检验。

（7）按住鼠标左键，在工具界面上拖动，画一个方框，包住图形上你想放大的部分。这里，我们选择原始信号中包含有噪声的部分。

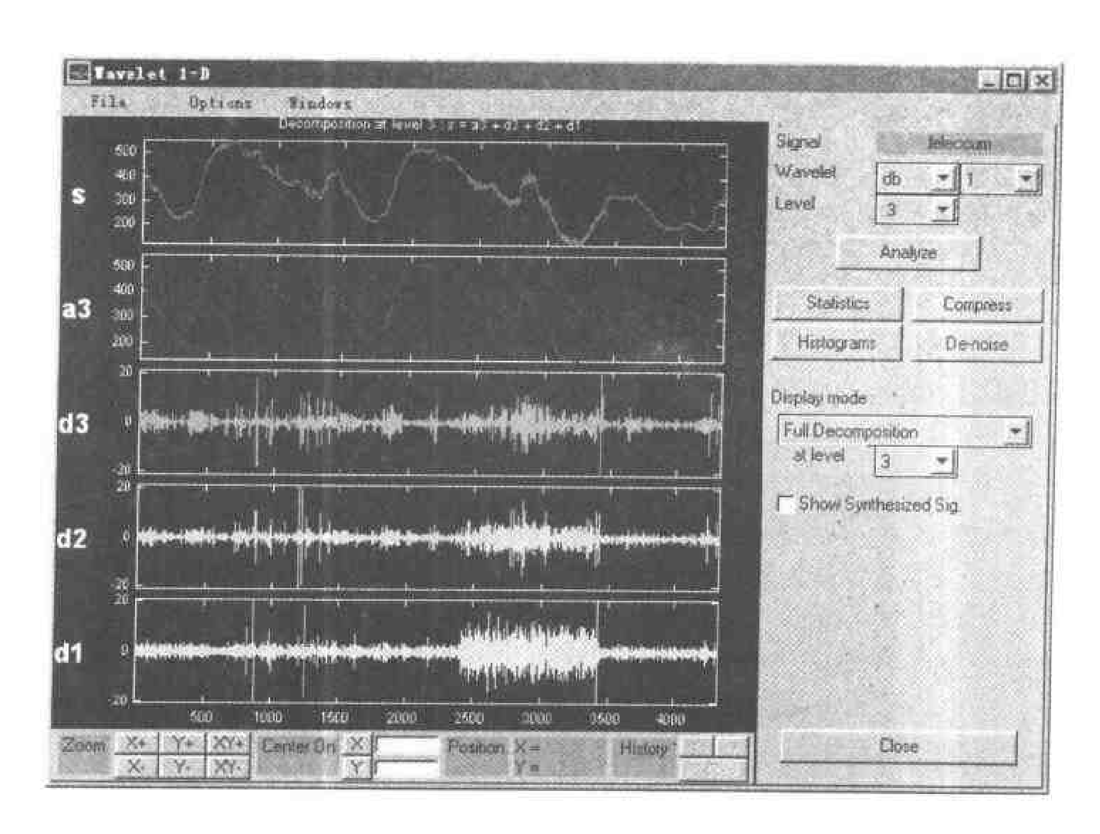
（8）单击 XY+按钮（位于工具界面的下部），使图形在水平与垂直两个方向都放大。其它的缩放按钮执行相应的操作，例如 X-按钮，就是在水平方向缩放图形。History 的功能是保存你对信号进行的各种观察，按一下左箭头按钮就返回到前一种状态。

下面对信号进行多级尺度分析。我们利用图形工具来仿照前一节命令行方式的操作。采用 db1 小波，为了对信号进行 3 级尺度分解：

（9）只需在工具界面的右上角选择尺度（Level）值“3”，然后再按分析（Analyze）按钮。



计算完成后，在 Wavelet 1-D 工具界面上你就会看到新的分析结果。



对于小波分析的结果，我们可以选择不同的显示模式来进行浏览。在工具界面的右侧中间部位，有一个选项“Display mode”，就是供你选择显示模式的。

缺省的显示模式为“Full Decomposition Mode（完整分解模式）”，其它还有：

① “Separate Mode（分离模式）”：把信号的细节和近似部分分列显示；

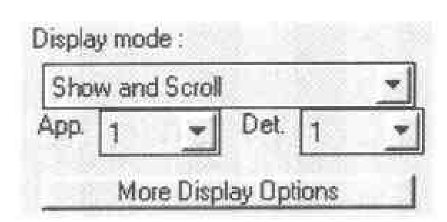
② “Superimpose Mode（重叠模式）”：就是把信号的所有细节部分以不同的颜色绘在一个图上，近似部分的处理也类似。

③ “Tree Mode（树形模式）”：显示小波分解树，原始信号曲线及一个附加的信号分量。单击分解树就可以选择你要观察的分量。

④ “Show and Scroll Mode（显示与滚动模式）”：显示三个窗口。第一个显示的是原始信号并叠加上一个你选择的近似分量，第二个窗口显示的是你选择的一个细节分量。第三个窗口显示的是小波系数图。

通过选项菜单（Options➔Default Display Mode），你也可以改变缺省的显示模式。

根据你选择的显示模式的不同，还可以有更多的显示模式供你选择。

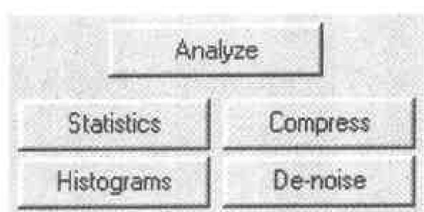


这些选项可以控制某些分量的显示，以及在显示细节和近似部分时是否同时显示原始信号。

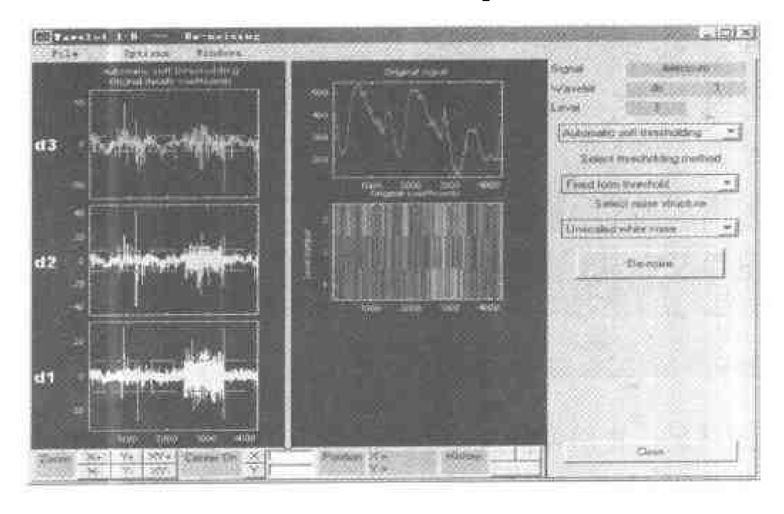
● **去除噪声**

图形界面工具的一个特色选项是采用自动阈值方法去除信号中的噪声。这使得信号去噪变得非常容易。

（10）激活“去噪”工具：单击位于窗口右侧中部、Analyze 按钮下方的 De-noise 按钮。

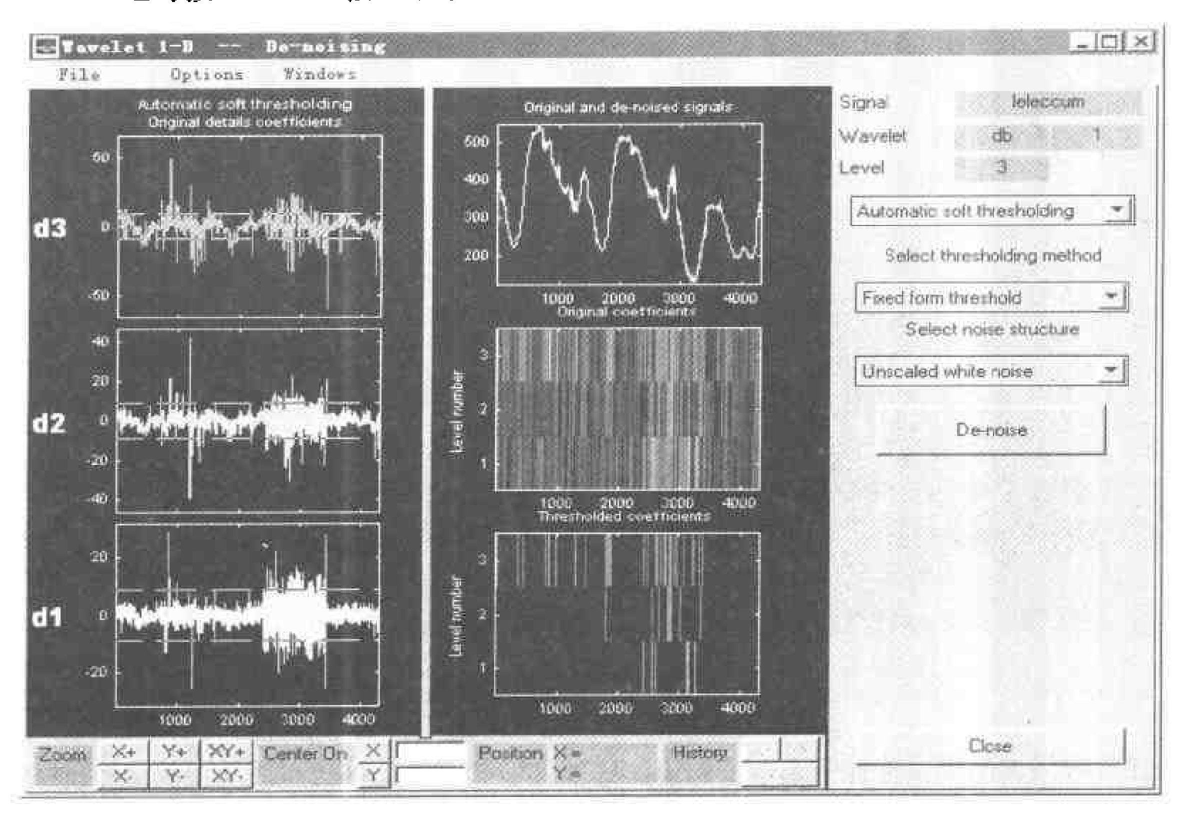


屏幕上弹出一维小波去噪（Wavelet 1-D De-noising）界面。



在窗口的右侧有一些选项，可以调整这些选项从而改变去噪的算法，在这里我们将接受缺省的选项，即 soft thresholding（软阈值）和 unscaled white noise（去除白噪声）。

（11）这时按 De-noise 按钮继续。



去除噪声后的信号重叠显示在原始信号上，而且屏幕上还绘出了二者的系数图。还可以对图形进行缩放以便对二者进行更精细的观察比较。

（12）拖动鼠标（按住左键）框住感兴趣的区域，然后单击 XY+按钮，窗口就会把这一区域放大。缺省情况下，原始信号显示为红色，去噪后的信号显示为黄色。

（13）退出一维小波去噪（Wavelet 1-D De-noising）窗口：单击 Close 按钮。

不能同时打开 De-Noise（去噪）和 Compress（压缩）窗口，所以必须先关闭“去噪”窗口才能继续。当出现 Update Synthesized Signal（更新合成后的信号吗？）对话框时，请选择 No（如果点击 Yes，一维小波分析主窗口中原信号也将更新为去噪后的信号）。

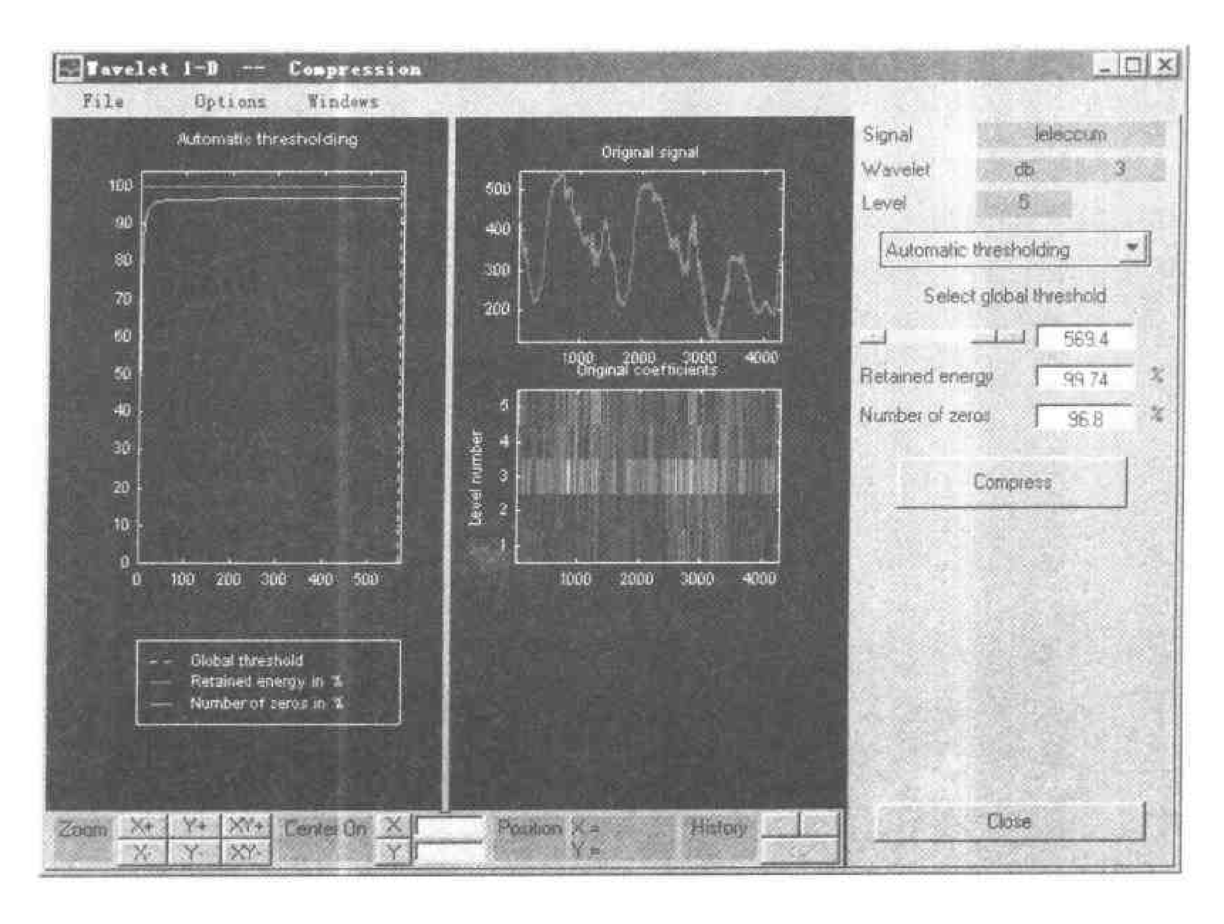
图形工具可以很容易随时对信号进行精细的分析。到目前为止，我们已对信号采用 db1 小波在尺度水平为 3 的情况下进行了分析。现在我们采用 db3 小波在尺度水平 5 下对信号作进一步的分析。

（14）在工具界面右上角尺度水平选择项输入 5，并选择小波类型 db3，单击 Analyze（分析）按钮。

● **信号压缩**

图形界面工具为我们提供了自动与手工阈值下的信号压缩选项。

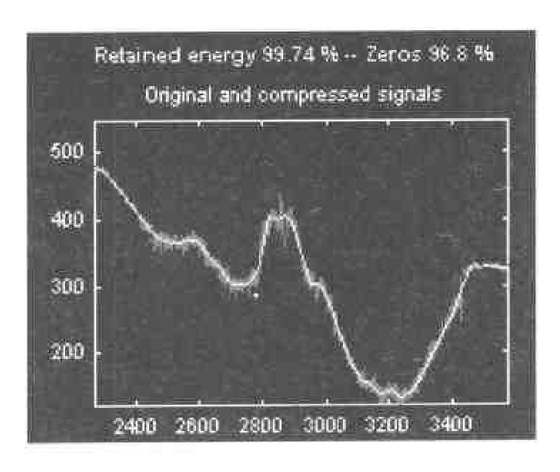
（15）激活 Compression（信号压缩）窗口：单击位于窗口右侧中部、Analyze 按钮下方的 Compress 按钮。屏幕上就会出现 Compression 窗口。



任何时候你都可以选择手工调节阈值，这里我们利用的是自动阈值，它使信号压缩变得快速和容易。

注意：如果你想试一试手工调节阈值，在窗口右上部位的下拉选项框里选择 manual thresholding（手工阈值）。在该选项框下方为一滑动条，表示阈值，其值与小波分解尺度水平有关，在左侧的窗口里表示为黄色的垂直点划线。

（16）单击位于窗口右侧中部的 Compress（压缩）按钮。经过一会儿的计算，信号重新以红色显示出来，其上重叠显示的黄色曲线就是压缩后的信号。下面就是我们对带噪声部分的信号放大显示的结果。



可以看到，压缩处理去掉了信号中大部分的噪声，但仍保留了信号 99.74%的能量。自动

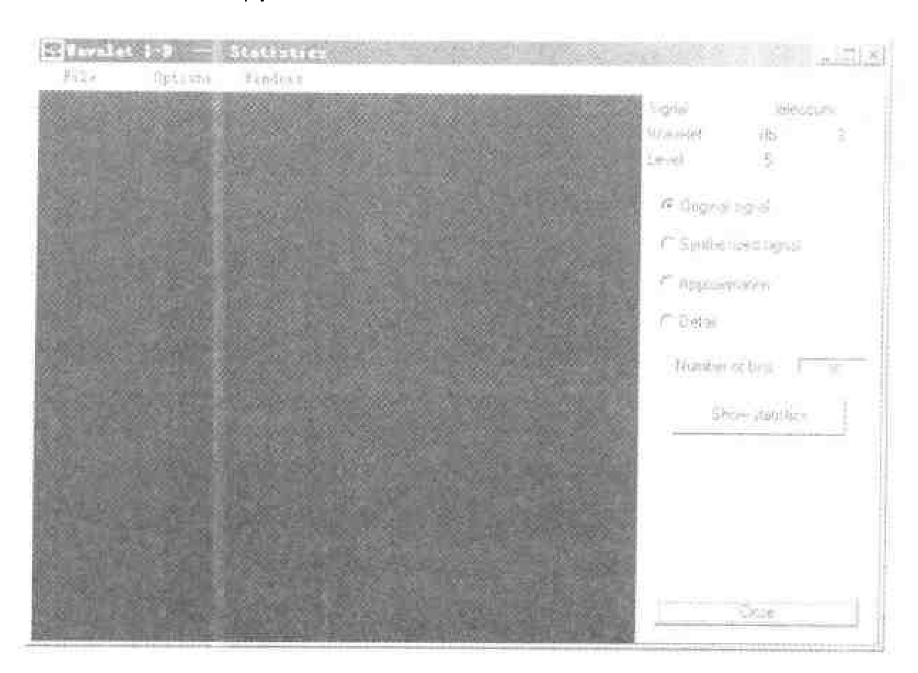
设置阈值的方法非常有效，只保留了小波分析系数的 3.2%，其它都被置成了零值。

（17）退出 Wavelet 1-D Compression（一维小波信号压缩窗口）：单击 Close（关闭）按钮。当出现 Update Synthesized Signal（更新合成信号吗？）对话框时，单击 No。

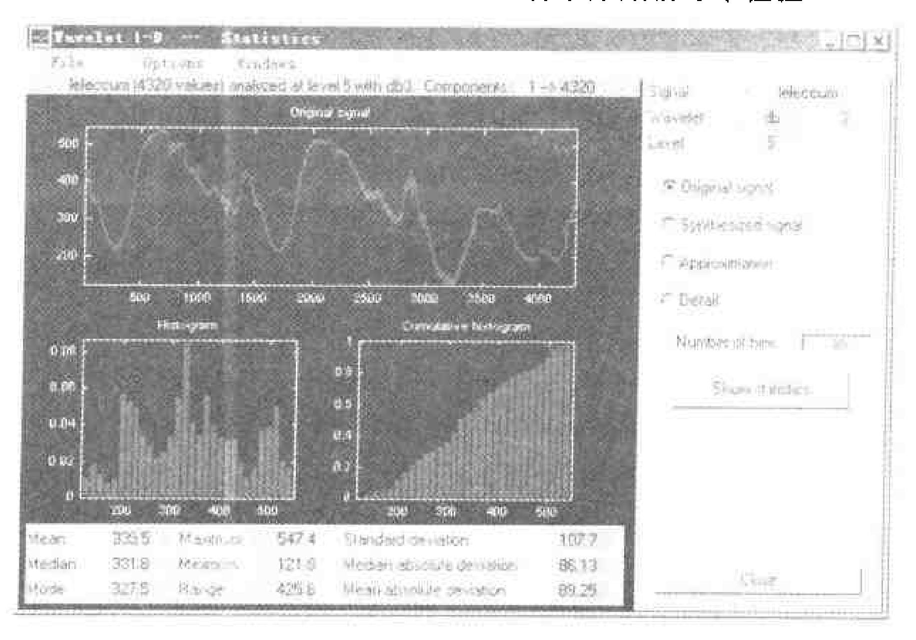
- **统计量显示**

我们可以通过图形工具观察所分析的信号及其分量的统计量的变化。

（18）在 Wavelet 1-D（一维小波）工具界面上，单击 Statistics（统计）按钮，屏幕上就会出现 Wavelet 1-D Statistics 窗口。



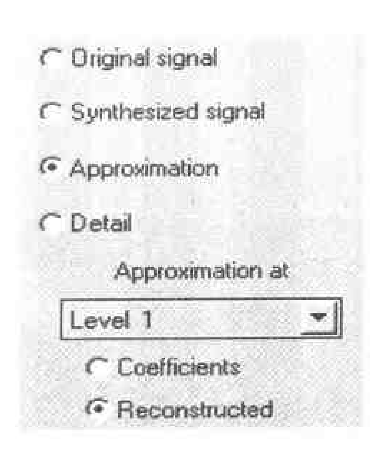
（19）选择你想检验其统计量的信号或信号分量。在窗口右侧，用鼠标选中恰当的单选按钮，然后按 Show Statistics 按钮。这里，我们选择了原始信号来检验。



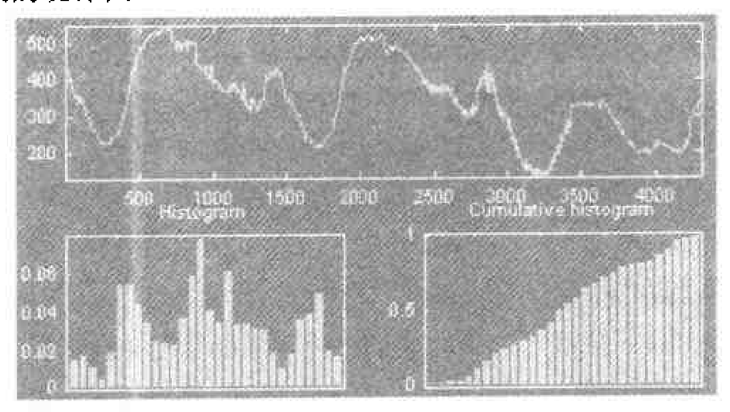
显示的统计量包括趋势估计（均值、众值、中值）和分布（范围、标准差等）。

此外，图形工具还显示了频率分布图（柱状图及累计柱状图）。你也可以在 Wavelet 1-D（一维小波）窗口按 Histograms 按钮来分别绘制这些柱状图。

（20）选中 Approximation（近似）按钮，就会出现一个下拉列表选项，从中你可以选择一个尺度水平，表示你想检验那一级近似系数。

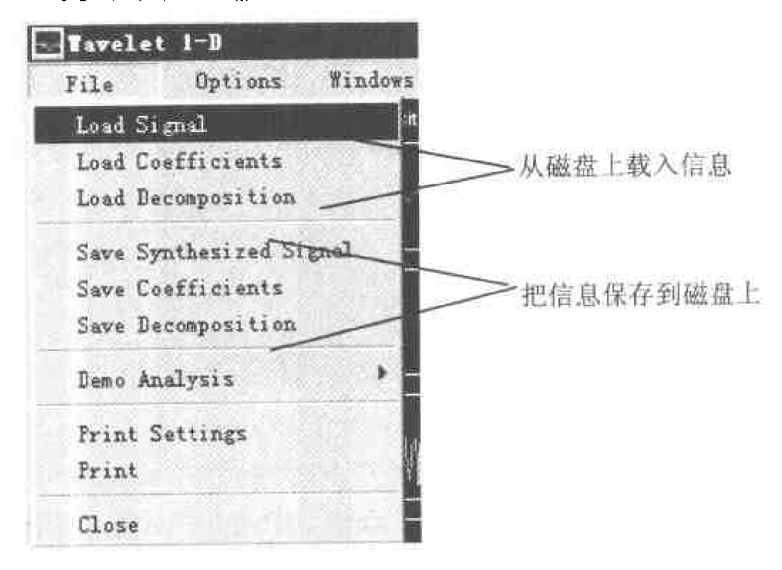


（21）从下拉列表中选择 Level 1 并再次单击 Show Statistics 按钮，屏幕上就会画出尺度等于 1 的近似系数的统计图。



三、图形界面方式下输入与输出信息

在图形界面方式下，可以从磁盘上输入信息或把信息输出到磁盘上。



- **保存信息**

在 Wavelet 1-D（一维小波）界面，可以把合成后的信号、小波分析系数及分解分量保存到磁盘上，可以对这些信息进行进一步处理或以后再输入图形界面工具中。

①保存合成信号。

在一维小波工具界面下，对信号处理后，可以把结果保存到磁盘上。

例如：按如下步骤调入信号来分析，File=>Demo Analysis=>with db3 at level 5 → Sum of sines，对原信号进行压缩或去噪处理。当关闭 De-Noise（去噪）或 Wavelet 1-D Compression（信号压缩）窗口时，会出现一个是否更新的对话窗口，这时单击 Yes 就可以了。

然后，在 Wavelet 1-D（一维小波工具）界面，选择菜单项：File=>Save Synthesized Signal。这时会弹出一个对话框，选择文件存盘的路径并输入文件名。如本例可以确定存储的文件名为 *synthsig*。

在 MATLAB 命令行方式下，输入下列命令就可以将刚才保存的文件调入到内存中：

```
>> load synthsig
>> whos
   Name        Size              Elements     Bytes     Class
   Synthsig    1 by 1000         1000         8000      double array
```

②保存离散小波变换系数。

在 Wavelet 1-D 工具界面下，可以将离散小波变换（DWT）的系数以 MAT 文件格式保存到磁盘上。例如，如果想保存当前分析的 DWT 系数，选择菜单项：File=>Save Coefficients。这时会弹出一个对话框，要求你选择文件存盘的路径并输入文件名。

考虑如下的演示例子。

File=>Demo Analysis=>with db1 at level 5 → Cantor curve.

将文件名确定为 *cantor.mat*，按如下方法可以把文件调入工作空间。

```
>> load cantor
>> whos
   Name     Size       Elements    Bytes     Class
   coefs    1 by2190   2190        17520     double array
   longs    1 by 7     7           56        double array
```

变量 coefs 包含的是离散小波变换系数。具体到本例，小波变换在尺度 5 下的分解系数都连在一起，形成了一个 1×2190 的矢量。而 longs 中的 7 个数分别对应各分解系数分量的长度。

③保存小波分解分量。

在 Wavelet 1-D 工具界面下，你还可以把离散小波分析的全部数据结果都保存到磁盘上。工具箱会在当前目录下创建一个扩展名为 wa1（表示 wavelet analysis 1-D）的 MAT 文件。

打开 Wavelet 1-D 工具并执行如下的菜单项：

File=>Demo Analysis=>with db3 at level 5 → Sum of sines.

执行下面的菜单项就可以保存分析结果：

File=>Save Decomposition.

这时，屏幕上会弹出一个对话框，让你确定文件保存的路径及文件名。这里输入文件名：

wdecex。

这时文件就以 wdecex.wa1 的名称保存在磁盘上了，通过如下命令操作还可以把保存的结果调入 MATLAB 工作空间：

```
>> load wdecex.wa1 - mat
>> whos
   Name        Size        Elements    Bytes    Class
   coefs       1 by 1023   1023        8184     double array
   data_name   1 by 8      8           64       double array
   longs       1 by 64     64          512      double array
   wave_name   1 by 3      3           24       double array
```

● **把信号调入 Wavelet 1-D 工具**

我们也可以将信号、分析系数及各分解分量调入图形界面工具中。这些信号可以是以前从图形界面导出的，或者就是在命令行方式下生成的。

无论哪种情况，你都必须了解 Wavelet 1-D 工具使用的数据文件的格式和数据结构，否则就会出错。

①载入信号。

要把以前在 MATLAB 工作空间生成的信号文件载入 Wavelet 1-D 工具中，那个文件必须用与变量相同的文件名保存。

例如，假设有一个信号 warma，如果想在 Wavelet 1-D 工具中分析它，必须：

```
>> save warma
```

变量 warma 必须为一个矢量。

```
>> sizwarm = size (warma)
   sizwarma =
                    1          1000
```

通过如下菜单选项就可以把这个信号载入 Wavelet 1-D 工具中。

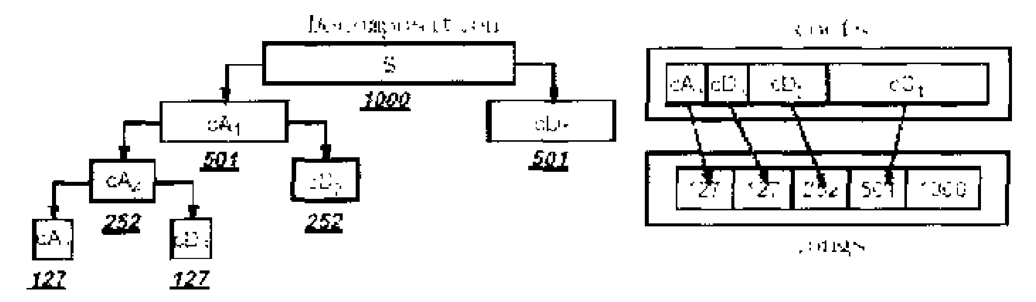
File=>Load Signal.

当对话框弹出后，请选择合适的 MAT 文件，

②载入离散小波变换系数。

要把离散小波变换系数调入到 Wavelet 1-D 工具，首先必须将相应的数据保存为 MAT 文件格式，这个文件只包含两个变量：coefs 和 longs

变量 coefs 必须为一个 DWT 系数矢量（不同尺度下的变换系数连在一起），变量 longs 为记录变换系数及原始数据长度值的矢量。



在工作空间中准备好这两个变量后，以 myfile 文件名存盘：

〉〉 save myfile

在 Wavelet 1-D 工具下通过如下菜单操作就可以把以上数据载入图形界面工具。

File=>Load Coefficients

当出现对话框后，选择相应的文件名即可。

③载入分解系数。

要想将一维小波变换各分解分量载入 Wavelet 1-D 图形工具，首先必须将相应的数据以 wa1（wavelet analysis 1-D）为扩展名存盘。该文件包括如下一些变量：

变　量	描　　述
Coefs	DWT 系数
Data_name	分析变量（数据变量）名
Longs	记录变换分量（coefs）及原始数据长度值的矢量
Wave_name	小波分解时用到的小波类型字符串

在工作空间中准备好这四个变量后，以 myfile.wa1 文件名存盘：

〉〉 save myfile.wa1

在 Wavelet 1-D 工具下通过如下菜单操作就可以把以上分解数据载入图形界面工具。

File=>Load Decomposition

当出现对话框后，选择相应的文件名即可。

第十一章　小 波 应 用

§11.1　一般讨论

本章通过如下几个实例分析来探讨小波的应用。

- 不连续性及断点检测（I 和 II）；
- 估计长周期趋势；
- 自相似检测；
- 识别纯频率；
- 信号抑制；
- 信号去噪；
- 信号压缩。

每一个例子后面，对小波分析在特定领域的使用方法，都给出简要的讨论。在图形界面下可按如下步骤进行分析。

（1）在 MATLAB 命令行状态下，输入：

```
>> wavemenu
```

（2）单击 Wavelet 1-D（或者其它工具）；

（3）在 File=>Demo Analysis 子菜单下选择一个例子进行分析。

在图形界面工具中，无论是信号压缩还是去除噪声，或者是检测信号统计量，或者针对不同的信号特征进行放大或缩小，你都可以自由尝试，看看在各种选项情况下，信号分析的结果有些什么不同。

只要你愿意，还可以在 MATLAB 命令行方式下，输入相应的 MAT 文件，利用小波工具箱函数对信号作进一步的研究。这些 MAT 示例文件存放在下面的目录中：toolbox/wavelet/wavedemo。在这个目录下，还有一些其它的信号数据文件，读者不妨自己尝试进行分析。

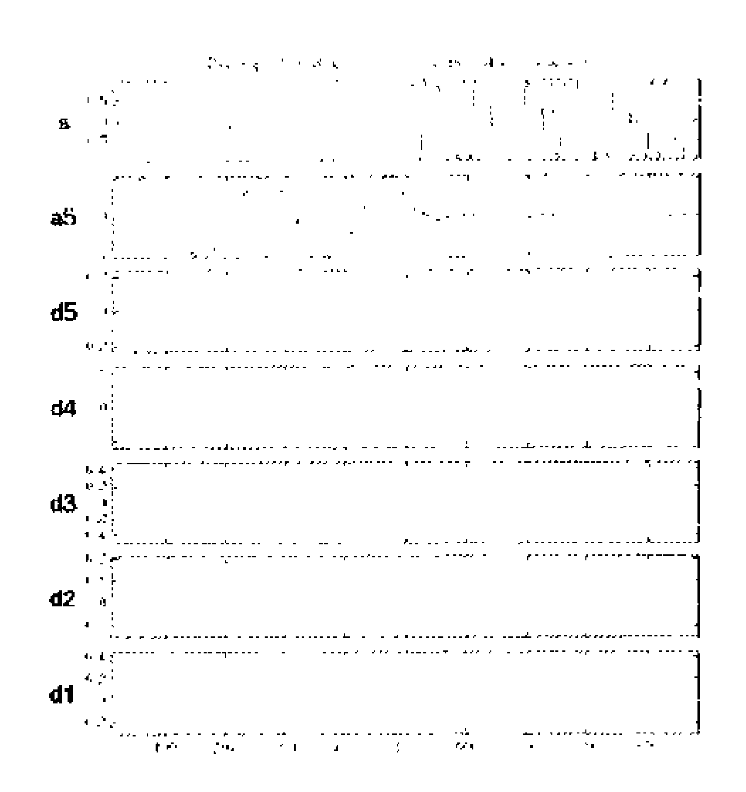
一、信号不连续性及断点检测（I）

本例的目的是要表现如何利用小波分析来精确检测信号发生变化的瞬时位置。这个不连续信号前半部分是一个变化“较慢”的正弦波，紧接其后为一个“中速”变化的正弦波（见下页图）。

由于信号中突然加入一个高频信号，在信号分析图上第一和第二级细节（d1 和 d2）十分清楚地显示出了信号的不连续性。这里要注意的是，如果我们的兴趣仅在于识别信号的不连续性，小波类型选择 db1 比 db5 可能更有用。

我们很准确地定位到这个不连续点：仅仅是在时间点（横坐标）500 附近一个较小的改变，从而导致了第一和第二级细节变化很大。

这个例子很有用，因为从这里就可以看到小波分析较之于傅里叶分析，前者具有的重要优势。如果采用傅里叶变换来分析这个例子，我们可能就检测不到信号频率变化的瞬时位置，而这里用小波分析却清楚地观察到了。



Demo Analysis:
Frequency breakdown
MAT-file:
freqbrk.mat
Wavelet:
db5
Level:
5

细节信号 d3 和 d4 基本上代表了“中速”变化的正弦波，而在 a5 中基本上就只剩下了“较慢”的正弦波，由此就把高频信号滤除掉了。

● **讨论**

信号可能会产生突变，如信号跳变或其一阶或二阶导数发生了剧烈变化。在图形处理中，一个主要的问题就是边缘检测或称为突变检测。与动态系统的瞬时信号一样，在这类应用中，我们需要探测快速变化的信号。

这些现象的主要特征是信号要么在时间上要么在空间上发生变化。

这类信号分析的目的是要确定：

- 变化的地点（如时间或位置）；
- 变化的类型（信号断开了，或其一阶或二阶导数发生剧烈变化）；
- 变化的幅度。

小波分析很好的局域性质非常适合于处理这类现象，而信号处理中所取的尺度就代表了信号变化的速度。

● **不连续检测的指导方针**

在检测信号断点时，采用支撑区较短的小波常常比较长小波更有效。当选取较小的分析尺度时，小波的支撑区间较小，这样我们就能对信号进行细致的分析。由最小的小波识别的不连续点的形状比采用最长的小波识别时更简单。

因此，要识别：

- 信号的不连续性，采用 Haar 小波；
- j 阶导数的突变点，应选择一个尽量规则的小波，至少应存在 j 阶消失矩（请见“信号不连续性及断点检测（II）”）。

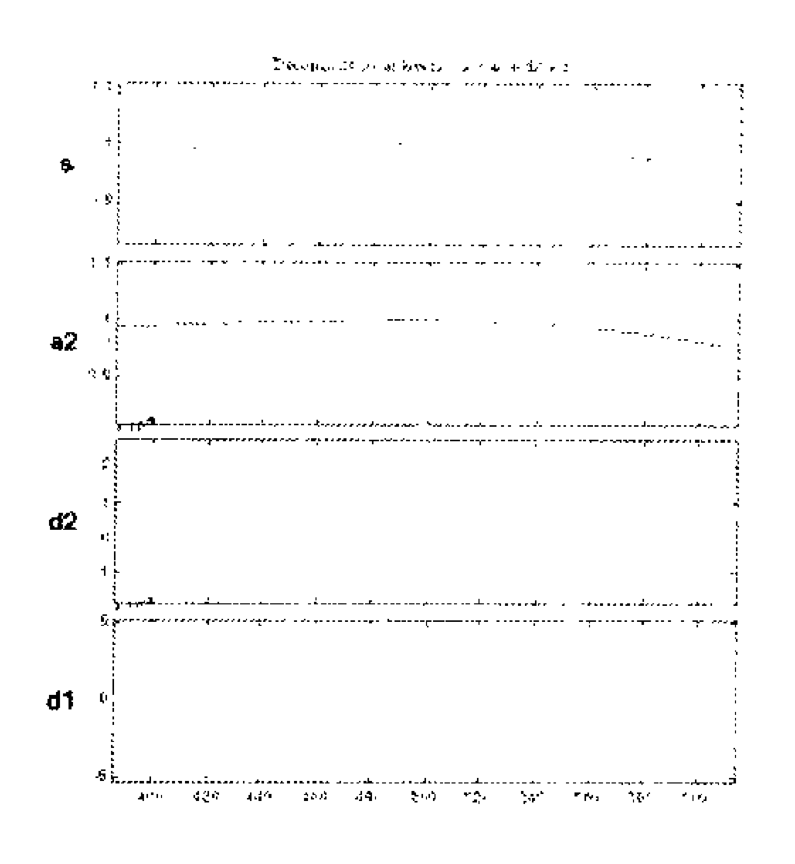
由于噪声的存在（这在信号处理中毕竟是相当普遍的），使得不连续性检测更加复杂。如果能在第一级尺度时就可去除掉大部分的噪声，那么，在取较大尺度时，就可以看到信号的断点。

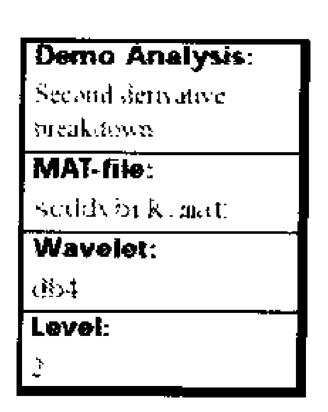
例如，分析演示信号：通过菜单执行 File=>Demo Analysis=>ramp+white noise（MAT 文件 wnoislop）。在分析的第六级近似（a6）中就可见到信号断点的情形。

二、信号不连续性及断点检测（Ⅱ）

本例的目的是通过小波分析如何检测到信号导数中存在的不连续点。显然，表面上看信号是条光滑曲线，而实际上，它是由两段独立的指数函数组成，在时间上各占曲线的前、后 500 个点。在其二阶导数曲线上，在时间点 500 时，不连续点出现。

在上面的图形中，我们对信号的中间部分进行了放大，以便更清楚地了解在横坐标为 500 周围的情形。细节信号的幅值只是在中间部分较大，而其它地方都可忽略。这说明在 500 附近存在高频信息——信号突变或不连续。





● 讨论

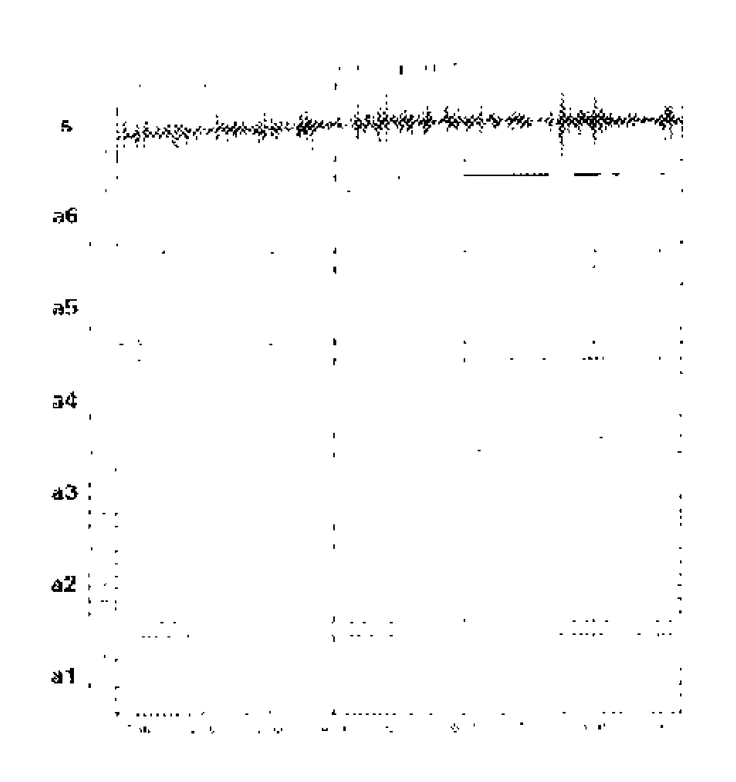
选择小波时，正则性是一个重要条件。这里我们选择 db4 小波。如果选择了 Haar 小波，就可能检测不到这个不连续点。如果你试一试采用 Haar 小波重新分析这个例子，我们可以注意到在尺度为 2 阶时，细节信号在 500 处为零。

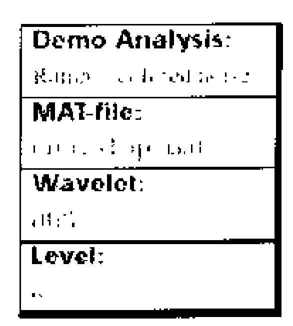
注意：要检测信号的奇异性，需要选择具有足够正则性（即滤波器有较长的脉冲响应）的小波。

三、长周期趋势估计

本例的目的是通过小波分析说明如何确定信号整体趋势。本例中的信号是一个被“有色

（频谱有限）”噪声掩埋的斜坡曲线（下图是在 x 轴方向放大的结果，这样避免了显示边沿效应）。





原始信号 s 中的噪声是如此之强，以至于表面上根本看不出其整体形态。在本例尺度等于 6 的分析中，信号的近似部分 a1 到 a6，我们注意到信号趋势变得越来越清晰了。为什么会这样呢？

信号的趋势表示信号中缓慢变化的部分。在小波分析中，其对应于最大的尺度值。随着尺度的增加，分辨率却在降低，达到对信号未知的趋势更好的估计。

另一方面我们也可以从频率方面来理解。随着尺度的增大，信号近似部分中包含的高频信息越来越少。随着较高频率成分的移除，剩下的就是信号的总体趋势。

● **讨论**

小波分析在估计信号趋势时很有用，目的是对揭示隐藏在噪声中的信号的补充。重要的是要记住趋势项是信号中变化最慢的。如果信号本身就包含了剧烈变化，那么连续的几个近似信号将会与原始信号愈来愈相似。

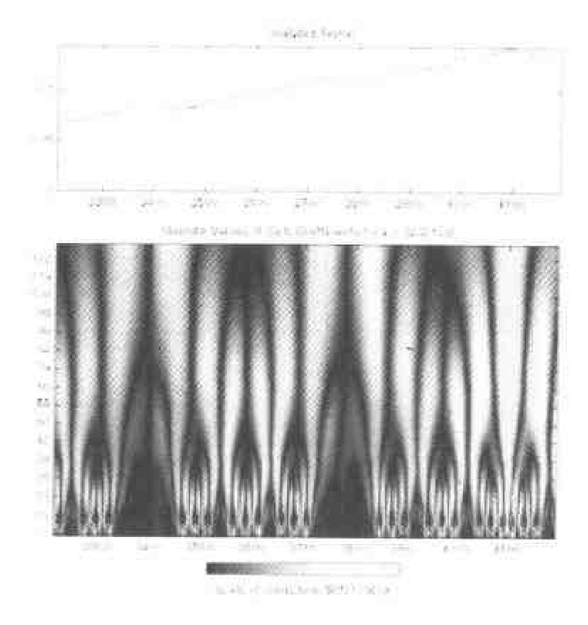
考虑如下的演示分析例子：File=>Demo Analysis=>Step signal（MAT 文件 wstep.mat）。采用 Wavelet 1-D 工具有利于分析本例这个信号。试着运行一下这个例子，看一看连续的近似信号的变化。

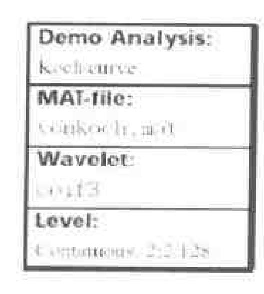
四、信号自相似检测

本例的目的是展示如何利用小波分析来检测信号的自相似性或者叫分形。这里的信号是一个 KOCH 曲线——用回归方法构建的一个合成信号。

这个演示分析由 Continuous Wavelet 1-D 图形工具来完成，小波系数曲线的重复图像在多个尺度上具有与信号相似的特征。

● **小波系数与自相似性**





直观上看，小波分解就是在信号和小波之间计算其相似指数。如果这个指数较大，相似性就较强，否则就较弱，这些指数就是小波系数。

如果在几个尺度上信号与其自身都相似，那么在这几个尺度上相似指数或者小波系数也是相似的。在以数轴表示尺度的系数曲线上，自相似性就组成了特征曲线。

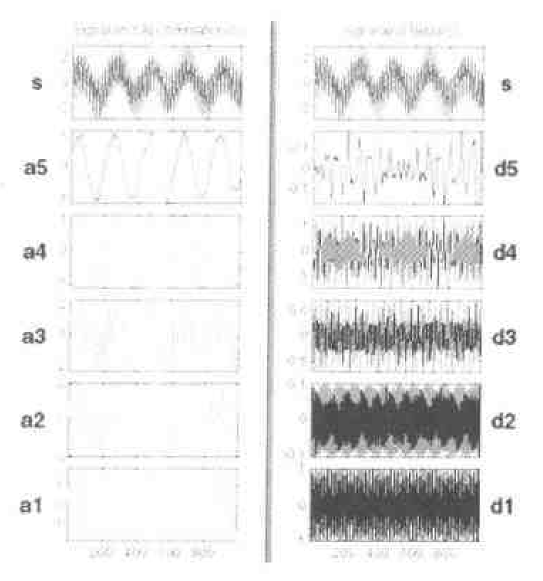
● **讨论**

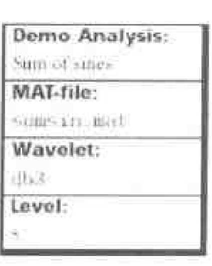
许多作者的工作以及他们的试验说明，小波分解非常适合研究信号和图像的分形性质。

当信号的分形特征随着时间变为局部化时，这个信号就是所谓的多级分形，此时小波就特别适合做实际的分析。

五、识别单一频率

本例的目的是展示如何利用小波分析来有效地把一个信号分解为不同频率连续的正弦波。该信号由三个单频率正弦波的和组成，数据文件存放的路径为：...\Matlab\toolbox\wavedemo\sumsin.mat。



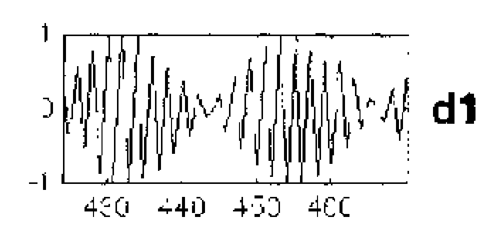


● 讨论

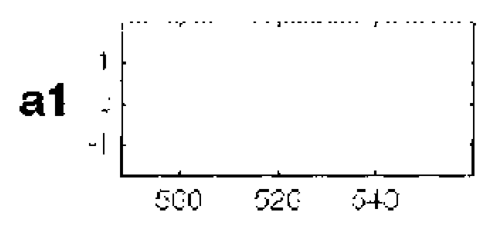
这个例子中的信号为三个“慢速”、“中速”和“快速”变化的正弦波的和，三个波的周期（设采样周期为1）分别为200、20和2。

经过小波分解后，“慢速”、“中速”和“快速”正弦波分别在近似分量a4、细节分量d4与d1中最明显。分解结果与原信号稍微存在一些差别，这可归因于采样周期。

细节分量d1上要包含的是信号中周期为1~2的信号分量（如“快变”正弦波），只是在图形界面下未明确标出这个周期值。对细节分量d1放大（见下图）可见，每一个“波包”都包含10个震动，并由此可以估计其周期。我们发现其周期接近2。



在细节分量d3甚至d4中，包含了“中速”变化的正弦波。这里需要注意的是，在近似分量a3与a4之间，波形形态发生了跳变，其间中等频率的信号成分被扣除掉了。因而我们就应该利用a1~a3来估计“中速”变化的正弦波的周期。对a1放大（见下图）可见其周期在20左右。



现在只剩下慢周期正弦波的周期有待确定了。分析a4分量图，可以看出两个连续的峰值之间的距离为200。

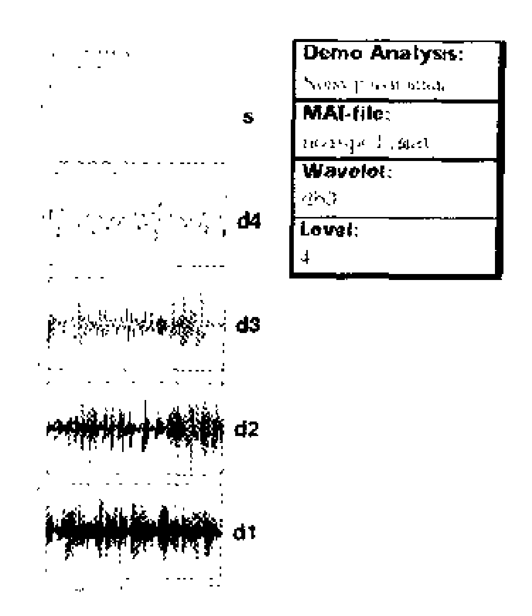
在a5分量中仍可以看出“慢速”变化的正弦波，但假如我们继续分解，就会发现它从近似部分中消失而出现在第8级尺度细节部分中了。

信号分量	出现位置	周期/s	频率/Hz
“慢速”正弦波	a4	200	0.005
“中速”正弦波	d4	20	0.05
“快速”正弦波	d1	2	0.5

总之，我们可以采用小波分析来确定信号中频率单一的信号分量。之所以能够这样做，是由于各优势频率出现在不同的尺度分量上。

六、信号抑制

本例的目的是向你演示在假设小波的“消失矩”超过多项式的阶数条件下，多项式分解导致没有细节分量的特性。这里所用信号为一个二阶多项式加少量白噪声。

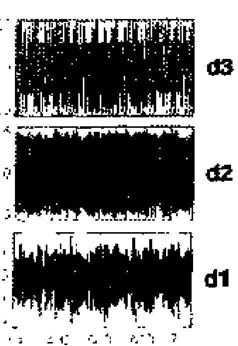


需要注意的是，在细节分量中只有噪声被过滤了。最大-最小峰值间的幅度约为 2，而多项式信号振幅值的数量级为 10^5。

本例中采用的 db3 小波，具有三阶消失矩。如果选择 Daubechies 小波系列中其它消失矩较少的小波，将达不到抑制多项式信号的目的。

下面是采用 db2 小波对这个信号进行分析时前三级尺度细节分量。

d1、d2 和 d3 曲线最大——最小值之间的幅值分别为 2、10 及 40。这些值比选择 db3 小波时要大许多。



● **讨论**

当选择 db2 小波时，从 2 级尺度到 4 级尺度，其细节分量显示出非常规则的周期性，并且随着尺度的增加周期性也越好。这可以由如下事实来解释：尺度 j 的细节分量主要考虑的是多项式函数在二进制间隔中（2^j 长）均值附近的波动性。波动分量具有周期性，并且比噪声分量的幅值大很多。

另一方面，在选择 db3 小波时，我们发现存在白噪声，表明多项式在任何细节分量中都不起作用。选择的这个小波对多项式表示的部分信号产生抑制，而对噪声进行分析。

抑制了部分信号，就可以强化剩余部分。

● **消失矩**

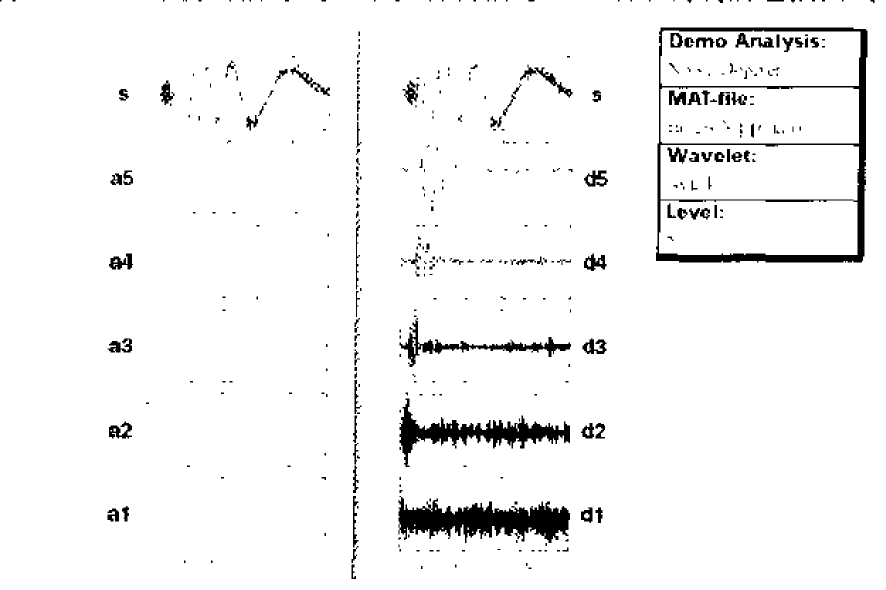
小波方法抑制多项式信号的能力与小波函数一个重要的数学性质即所谓的消失矩的阶数有关。有关消失矩的概念请参阅有关资料。此处，我们可以把“矩”当作“平均值”概念的

延伸、如果一个小波的均值为 0，那么它有（至少）一阶消失矩。

准确地说，如果 $x^k\psi(x)$（这里 $\psi(x)$ 为小波函数）的平均值为 0，当 $k=0,1,\cdots,n$ 时，那么这个小波具有 $n+1$ 阶消失矩，使用这个小波就可以抑制 n 阶多项式信号。

七、信号去噪

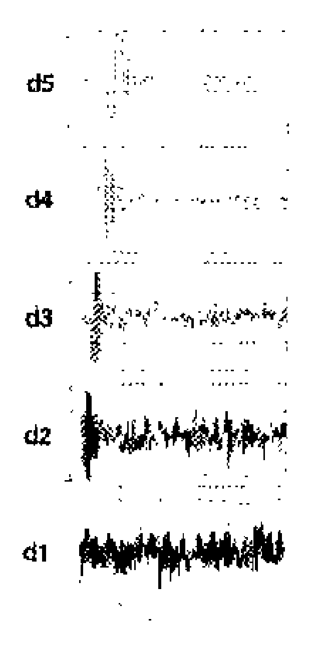
本例向你演示如何利用小波方法去除噪声信号，并且还将向你说明 Wavelet 1-D 图形工具的自动阈值特征。这里分析的信号是一个多普勒信号——频率调制的正弦曲线加上一些噪声。



● 讨论

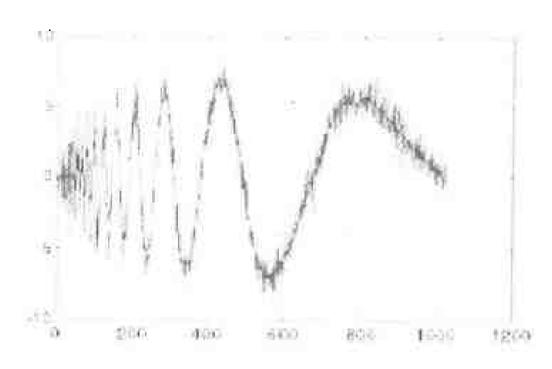
我们发现最高频率出现在原始信号的开头部分，从连续的几个近似分量中可以看到噪声越来越少，但是他们丢失的高频成分也越来越多。例如在近似分量 a5 中，大约有 20%的信号被去掉了。

单击 De-noise 按钮激活 Wavelet1-D De-noising 窗口，这个窗口上显示了所有的细节分量，并伴随着去噪阈值。



单击 De-noise 按钮，原始信号和去噪后的信号分别以红色和黄色重叠显示在屏幕上，在本图中把去噪后的信号以蓝色显示对比度更好。

注意：去噪后的信号开头比较平缓，说明高频信息在去噪过程中丢失了，虽然在较高尺度的近似分量 a4 和 a5 中丢失的比较少。

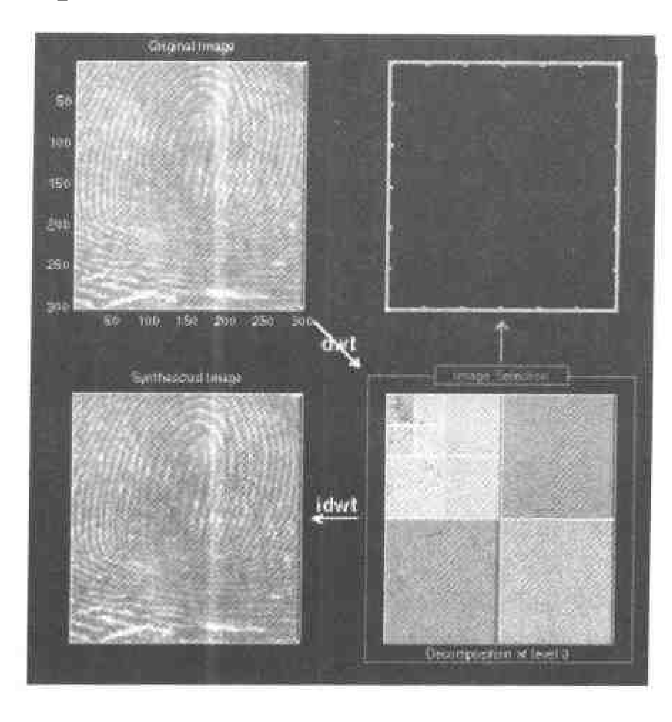


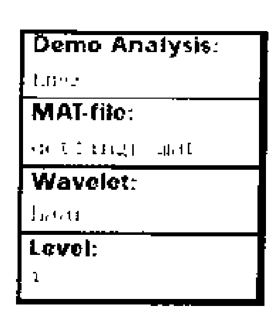
对这个信号采用小波包分析方法，去除不包含高频信号的噪声更有效，你可以使用 Wavelet Packet1-D 工具重新对这个信号分析一下。在菜单中选择 File=>Demo Analysis=>noisdopp。

八、信号压缩

本例的目的说明，用二维小波分析方法压缩图像。信号压缩是小波方法的一个重要应用，我们要压缩的图像是一个指纹图像。

要开始这个例子，打开 Wavelet 2-D 工具，选择菜单项 File=>Demo Analysis=>at level 3,with haar→finger。

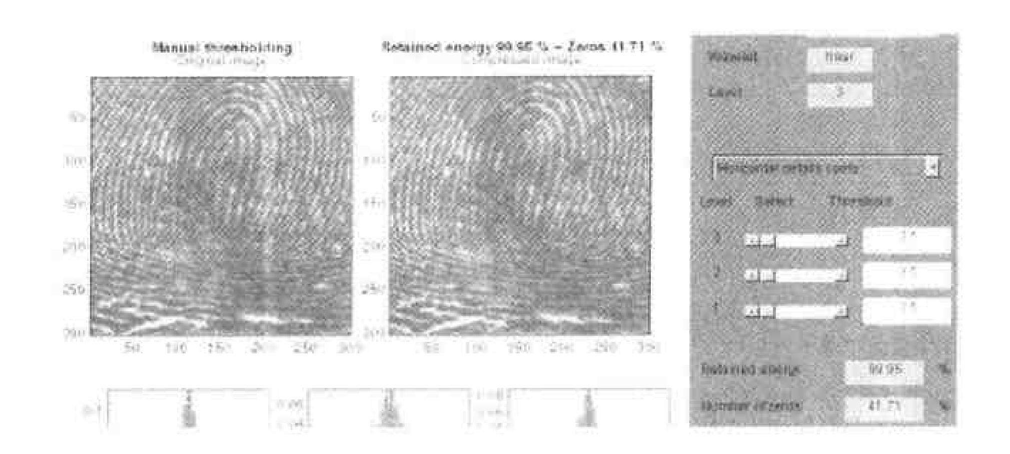




分析结果出现在 Wavelet 2-D 工具界面上，单击 Compress 按钮（位于右侧中间）激活 Wavelet 2-D Compression 窗口。

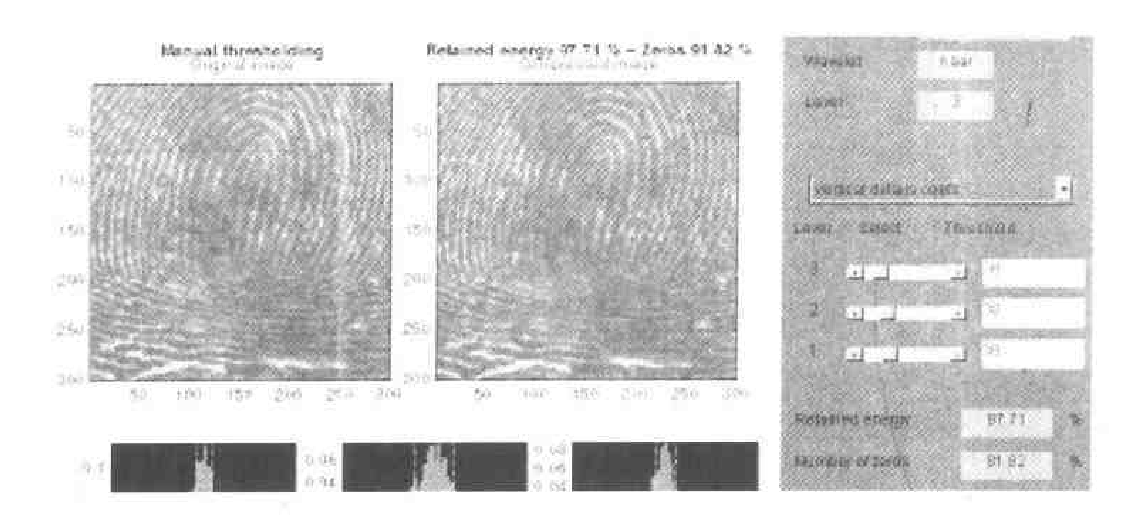
● **讨论**

该工具为我们提供了一个自动生成的阈值，对本例来说这个阈值为 3.5。小于这个阈值的小波分析系数将被置为 0，当有 42%的系数被置为 0 时，还可以恢复几乎所有（99.95%）的原图像。



通常自动阈值应在置 0 的数目和能恢复的图像能量之间达成一个合理的平衡。根据所分析的数据和压缩的标准，把阈值设得过一点可以取得更好得结果。

这里我们把每个阈值都设为 30，压缩后得图像包含了 91.8%得 0 值但却能恢复 97.7%的信号。



§11.2 实例分析

本节以例子的方式，演示了小波分解的各种可能结果。你可以自己动手操作，变换不同的参数，比较不同的分析结果。每个例子后面，留下了进一步探讨的余地，对于每个实例，还简要列出了重点主题。

一、演示例子说明

本章用于演示分析的 14 个例子简要情况列于表 11.1。

表 11.1　例子简要情况说明

图　名	示例信号描述	信号名称	MAT 文件
图 11.1	正弦信号之和：$s_1(t) = \sin(3t) + \sin(0.3t) + \sin(0.03t)$	$s_1(t)$	sumsin
图 11.2	频率断点： $1 \le t \le 500$，　$s_2(t) = \sin(0.03t)$ $501 \le t \le 1000$，　$s_2(t) = \sin(0.3t)$	$s_2(t)$	freqbrk
图 11.3	单一白噪声： 幅度范围[−0.5, 0.5]	$b_1(t)$	Whitnois
图 11.4	有色 AR(3)噪声 $b_2(t) = -1.5b_2(t-1) - 0.75b_2(t-2)$ $- 0.125b_2(t-3) + b_1(t) + 0.5$	$b_2(t)$	warma
图 11.5	多项式+白噪声： $s_3(t) = t^2 - t + 1 + b_1(t)$	$s_3(t)$	Noispol
图 11.6	阶跃信号： $1 \le t \le 500$，　$s_4(t)=0$ $501 \le t \le 1000$，　$s_4(t)=20$	$s_4(t)$	Wstep
图 11.7	两个断点接近的不连续信号： $1 \le t \le 499$，　$s_5(t)=3t$ $500 \le t \le 510$，　$s_5(t)=1500$ $511 \le t$，　$s_5(t)=3t-30$	$s_5(t)$	Nearbrk
图 11.8	二阶导数不连续信号： $t \in [-0.5, 0.5] \subset R$ $t < 0$，　$f_3(t) = \exp(-4t^2)$ $t \ge 0$，　$f_3(t) = \exp(-t^2)$ s_6 是 f_3 通过 10^{-3} 采样率采样得到的	$s_6(t)$	scddvbrk
图 11.9	斜坡信号+白噪声： $1 \le t \le 499$，　$s_7(t) = \frac{3t}{500} + b_1(t)$ $500 \le t \le 1000$，　$s_7(t) = 3 + b_1(t)$	$s_7(t)$	Wnoislop
图 11.10	斜坡信号+有色噪声： $1 \le t \le 499$，　$s_8(t) = \frac{t}{500} + b_1(t)$ $500 \le t \le 1000$，　$s_8(t) = 1 + b_1(t)$	$s_8(t)$	Cnoislop
图 11.11	正弦信号+白噪声： $s_9(t) = \sin(0.03t) + b_1(t)$	$s_9(t)$	Noissin

续表

图 名	示例信号描述	信号名称	MAT 文件
图 11.12	三角形+正弦： $1 \le t \le 500$， $s_{10}(t)=\dfrac{t-1}{500}+\sin(0.3t)$ $501 \le t \le 1000$， $s_{10}(t)=\dfrac{1000-t}{500}+\sin(0.3t)$	$s_{10}(t)$	trsin
图 11.13	三角形+正弦+噪声： $501 \le t \le 1000$， $s_{11}(t)=\dfrac{1000-t}{500}+\sin(0.3t)+b_1(t)$ $1 \le t \le 500$， $s_{11}(t)=\dfrac{t-1}{500}+\sin(0.3t)+b_1(t)$	$s_{11}(t)$	wntrsin
图 11.14	实际的电耗信号	—	leleccum

注意：①所有分解均采用 Daubechies 小波；②例子显示包括原始信号、近似部分和细节部分。

假设分解尺度为 5，对每个例子的说明如下：

- 图形左列为信号与近似部分 a5～a1；
- 右列为信号和细节部分 d5～d1；
- 近似分量 a1 位于 a2 之下，a2 在 a3 之下，依次类推；细节分量同理；
- 横轴代表时间，近似分量和细节分量的纵坐标单位与原信号相同；
- 当近似部分不能提供足够信息时，改变小波类型再观察细节部分；
- 示例要求思考的两个问题：

✓ 在图上能够看到什么？

✓ 需要进一步研究的问题？

二、建议

运行这些示例分析，既可以在命令行方式下，也可以在图形界面方式下操作。要在图形方式下执行这些例子，请遵循下面步骤：

（1）激活小波工具箱主菜单（Wavelet Toolbox Main Menu），在 MATLAB 提示符号下，输入：

```
>> wavemenu
```

（2）选择 Wavelet 1-D 菜单选项打开 Wavelet 1-D 工具；

（3）在 Wavelet 1-D 工具下，选择 File→Demo Analysis 菜单项；

（4）在展开的菜单框中，选择要分析的示例。

三、实例分析

下面，我们就对表 11.1 中所列的 14 个例子进行分析。在每个例子后面，都有一个总结

表，表中列出了对应例子的重点主题（即通过例子要达到的目的），并给出了有必要进一步讨论的要点。希望读者结合实例，努力理解小波分析的实质。

例 1　正弦信号的和

小波类型：db3

分解尺度：5

这个信号由三个不同周期的正弦信号的和组成。我们可以把它们叫做“慢速”、“中速”和“快速”变化的正弦波，如果设定采样周期为 1，三个正弦信号的周期分别是 200、20 和 2。在后面我们将看到，快变信号体现在信号小波分解分量的 d1 中，中速变化的正弦波在 d4 中，而慢变正弦波在 a4 中。它们之间细微的差别可归因于采样周期。近似部分信号曲线的幅度与细节信号幅度的比例大约是 2、4 或 10。d1 分量中主要包含了周期在 1 到 2 之间的信号（即快变正弦波），但在图上看不大清楚。对 d1 曲线放大，我们可以看出它的每个“钟形”包络中都包含有 10 个振荡，我们由此可以估计其周期，并发现这个周期接近于 2。在近似信号图中我们发现头两个分量信号的波形彼此和相似，那是由于 a1=a2+d2，而 d2 振幅很小。

细节分量 d3 与 d4 中主要包含的是“中速”变化的正弦波。这里我们注意到近似信号 a3 与 a4 之间有明显的突变。近似部分 a1~a3 可用于估计中速变化的正弦波。现在就只剩下出现在 a4 中的“慢变”正弦波有待确定。在 a4 的两个连续的最大峰值之间，我们测量其距离是 200，正好就是“慢变”正弦波的周期。在 a5 中还可以看到这个质期的信号，但在随后的近似分量中就消失了，最后出现在尺度为 8 的细节分量中。

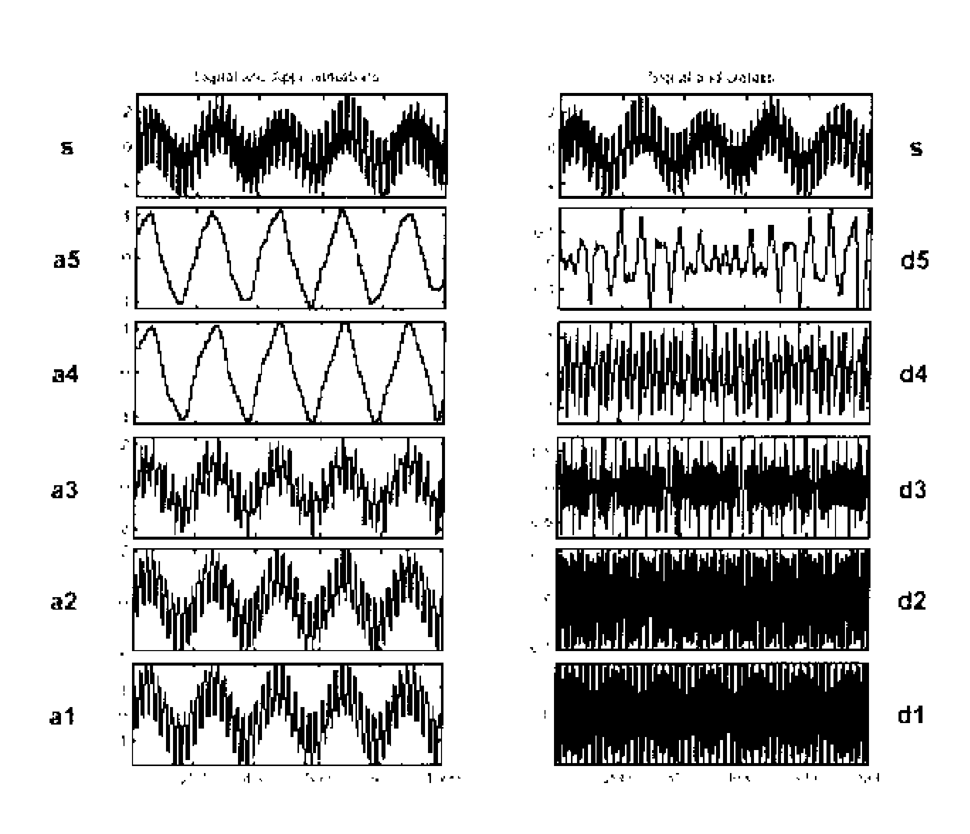


图 11.1　三个正弦信号的线性组合的小波分解分量

总结：

例 1　正弦信号的和	
重点主题	● 突变点检测 ● 长周期趋势估计 ● 单一频率识别 ● 选择分析用的小波对正弦波的影响 ● 细节部分与近似部分的关系：信号先在近似部分，又出现在细节部分 ● 信号特征出现的尺度
进一步讨论	● 与傅里叶分析比较 ● 改变频率，分析其它线性组合的情况

例 2　频率断点

小波类型：db5

分解尺度：5

该信号由一个“慢速”变化的正弦波和一个“中速”变化的正弦波组成，二者各占信号时间段的前一半和后一半的 500 个点。两个正弦波在连接处是不连续的，d1 和 d2 可用于检测其不连续性。检测定位非常精确：就在第 500 个点附近出现了很大的细节信号。这是因为信号突变包含高频分量，在信号其它分量中其频率就不够高了。需要注意的是，如果我们只对识别不连续点感兴趣，那么 db1 小波比 db5 更有用。

与前一个例子的分析一样，d3 和 d4 包含了速变化的正弦波。在 a5 中就差不多只剩下慢速变化的正弦波了。与前一个例子相比，这里提取的慢速变化正弦波更加规则，这是由于 db5 比 db3 更规则一些。要是采用傅里叶变换来分析这个信号，就不大可能这么方便快捷地检测到信号的频率变化，而这里的结果却很清晰有效。

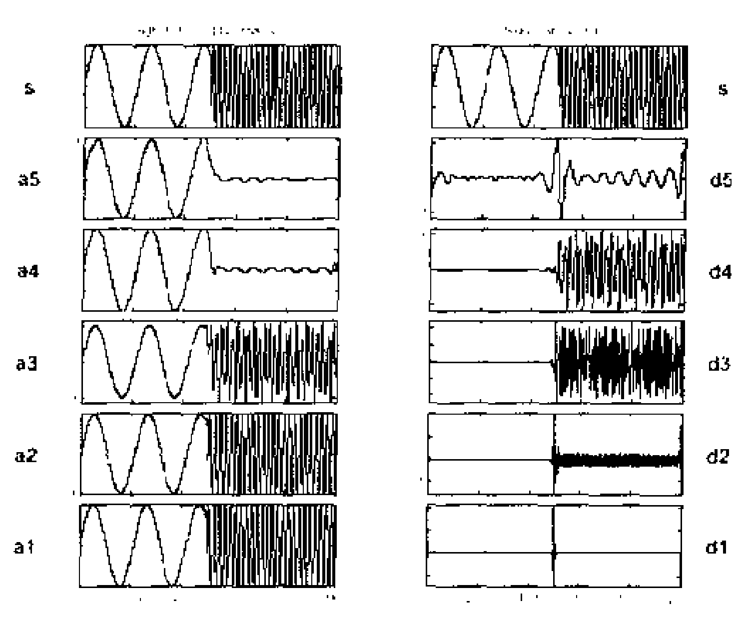


图 11.2　频率断点分析

总结：

例 2　频率断点	
重点主题	●信号抑制 ●长周期趋势检测
进一步讨论	●与前一个信号 s1 比较 ●在尺度更大时，看看慢正弦波是否转移到细节部分中 ●与傅里叶分析比较 ●与窗口傅里叶分析比较

例 3　白噪声

小波类型：db3

分解尺度：5

在所有分解尺度上，得到的分量都是不规则的噪声信号。这是由于对于白噪声来说，所有频率成分携带的能量都相同。但是，从信号的细节分量（右侧）和近似分量图（左侧）可以看到，随着尺度的增加，信号方差逐渐减小。两个尺度之间方差减小两倍，即方差 D_j=方差 $D_{j-1}/2$。最后，我们应该注意细节分量和近似分量不再是白噪声，随着分辨率的降低，这些信号之间相关性越强。另外，小波系数的变化却是随机的、不相关的。对于重建的信号，这一特征不明显，但观察系数曲线，我们可以做出这样的猜测。

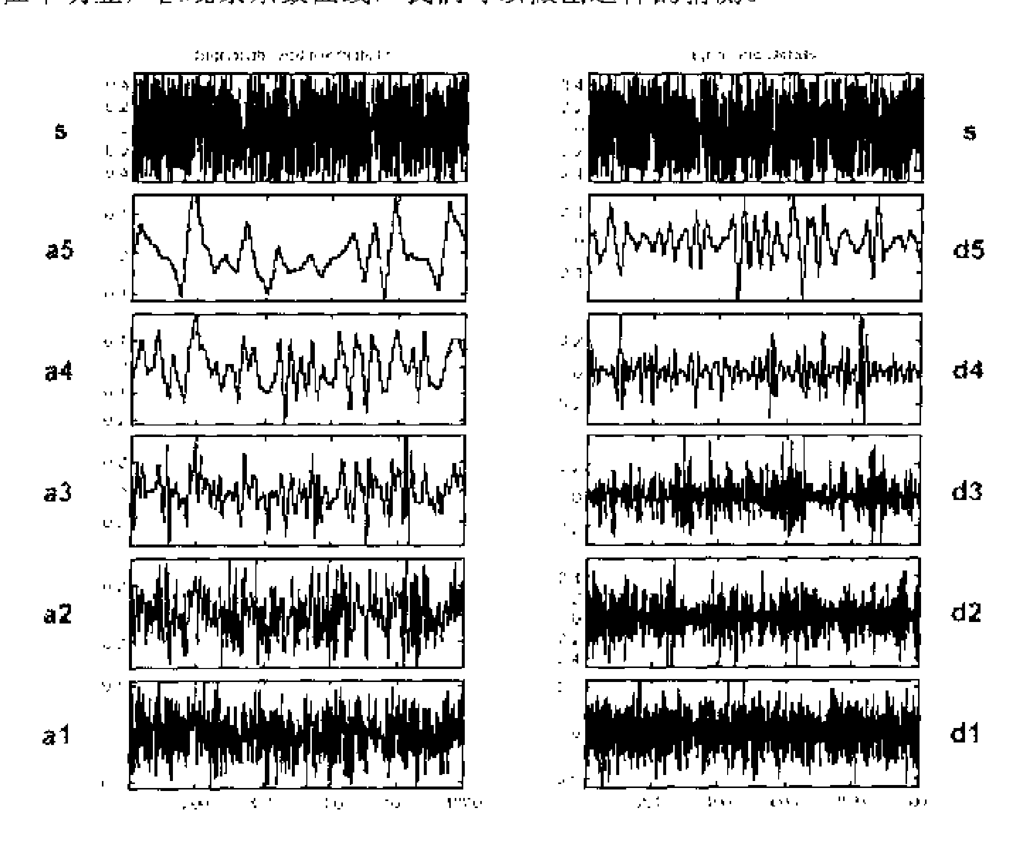


图 11.3　完全白噪声信号小波分析

总结：

例3　白噪声	
重点主题	● 噪声处理 ● 信号分解分量图形形态 ● 根据尺度估计曲线形态：相关性增加，方差减小 ● 比较细节分量和近似分量中包含的频率成分
进一步讨论	● 研究系数值及其分布 ● 在连续分析情况下，确定颜色的无序特征 ● 用高斯白噪声或其它噪声信号代替这个完全白噪声信号再次分析

例4　有色 AR（3）噪声

小波类型：db3

分解尺度：5

注意：AR（3）表示3阶自回归模型。

这个例子可以由前一个例子来检验，由于这个信号是一个非白噪声，其频谱主要位于高频段。因此，我们可以看到在d1中集中了信号的主要能量。实际中经常遇到这种现象，在这种情况下，噪声对分析的影响比白噪声情况下要小很多。在a3、a4和a5中，我们碰到在分析信号b_1时同样的情况（表11.1），因为b_2是由其经过线性滤波得到的。

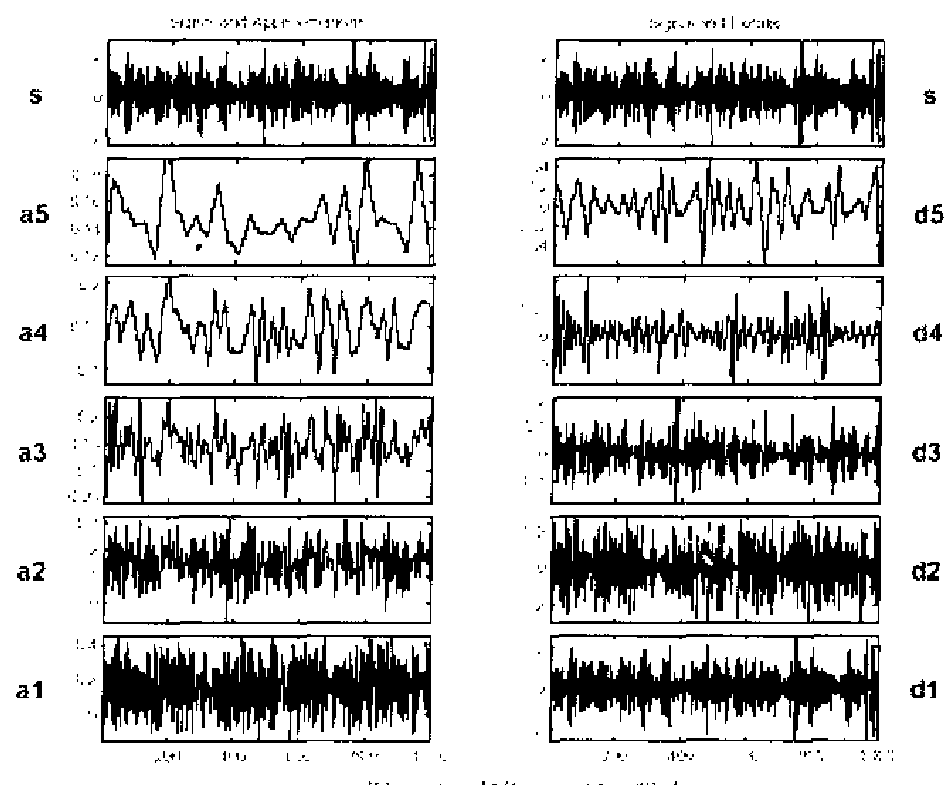


图11.4　有色 AR（3）噪声

总结：

例4　有色 AR（3）噪声	
重点主题	● 噪声处理 ● 各个细节分量的相对重要性 ● 比较 d1 和 a1 的重要性 ● 比较细节分量与近似分量中包含的频率
进一步讨论	● 与图 11.3 比较近似分量 a3、a4 和 a5 ● 用 ARMA（自回归滑动平均）模型代替 AR（3）。如： $b_3(t) = -1.5b_3(t) - 0.75b_3(t-2) - 0.125b_3(t-3) + b_1(t) + 0.7b_1(t-1)$ ● 研究 ARIMA（整合 ARMA）模型噪声，如： $b_4(t) = b_4(t-1) + b_3(t)$ ● 检查是否每个细节分量都可由 ARMA 过程模拟

例 5　多项式信号+白噪声

小波类型：db2 和 db3

分解尺度：4

给出这个例子，目的是要展示这样一个特性：当采用 db$N$ 小波来分析 p 阶多项式时，只要 $N > p$，就将会得到空的细节分量。当 $p = 2$ 时，我们来检验 N 等于 2 和 3 时，小波分解的前四个尺度分解分量：$N = 2$ 时的细节分量图在左侧，$N = 3$ 的在右侧。由于近似分量与原信号只有细微差别，这里就未画出近似分量图。

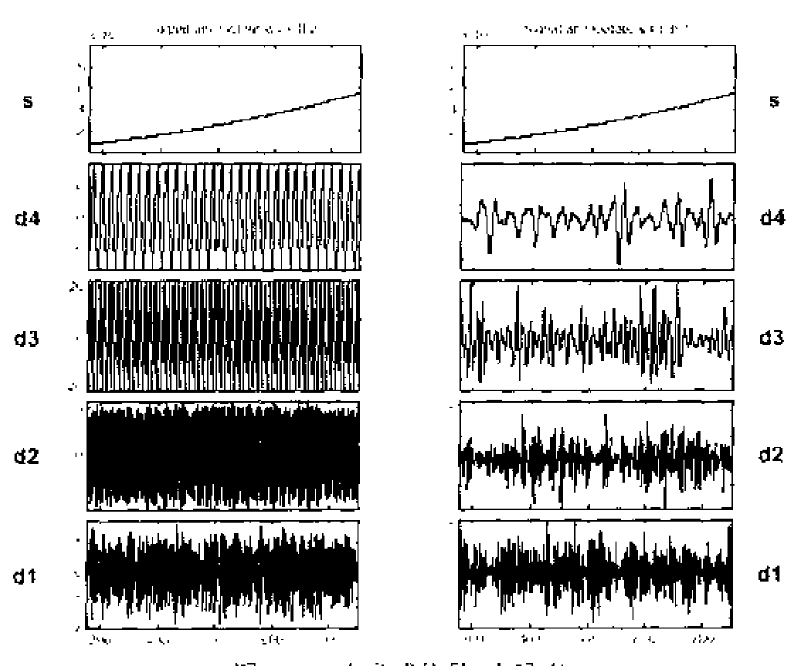


图 11.5　多项式信号+白噪声

对于 db2（左图）情况，我们得到的是 $t^2+b_1(t)$的分解结果，因为$-t+1$ 部分被小波抑制掉了。事实上，除尺度等于 1 时外（这时可以看到明显不规则的噪声），在尺度 2~4 的情况下，

细节分量呈现出非常规则的周期性，并且其周期随着尺度而增加。这种情况可以这样来解释：尺度为 j 时，信号小波分解的细节分量主要包含信号均值周围的波动成分。波动分量呈现出周期性，并且与噪声的细节分量存在很大相关。

另外，对于 db3（见 126 页右图）情况，我们再次发现白噪声的存在，这表明在各级细节分量中不存在多项式信号。小波压制了多项式信号部分而分析噪声部分。

总结：

例 5　多项式信号+白噪声	
重点主题	● 信号抑制 ● 比较如下两个小波的处理结果： 支撑区较短的 db2 和支撑区较长的 db3 ● 解释在 db2 情况下在 d3 和 d4 曲线中出现的规则性

例 6　阶跃信号

小波类型：db2

分解尺度：5

本例中的信号为一突跳信号（即阶跃信号），产生阶跃的时间点为 500。在小波分解图中，这个断点在所有尺度情况下都被检测到了，但断点确定的精度在较高分辨率（尺度 1 与 2）下比低分辨率（尺度 4 与 5）时要高。在尺度为 1 的情况下，测定的精度最高，在跃变点附近，只有一个极小的条带。

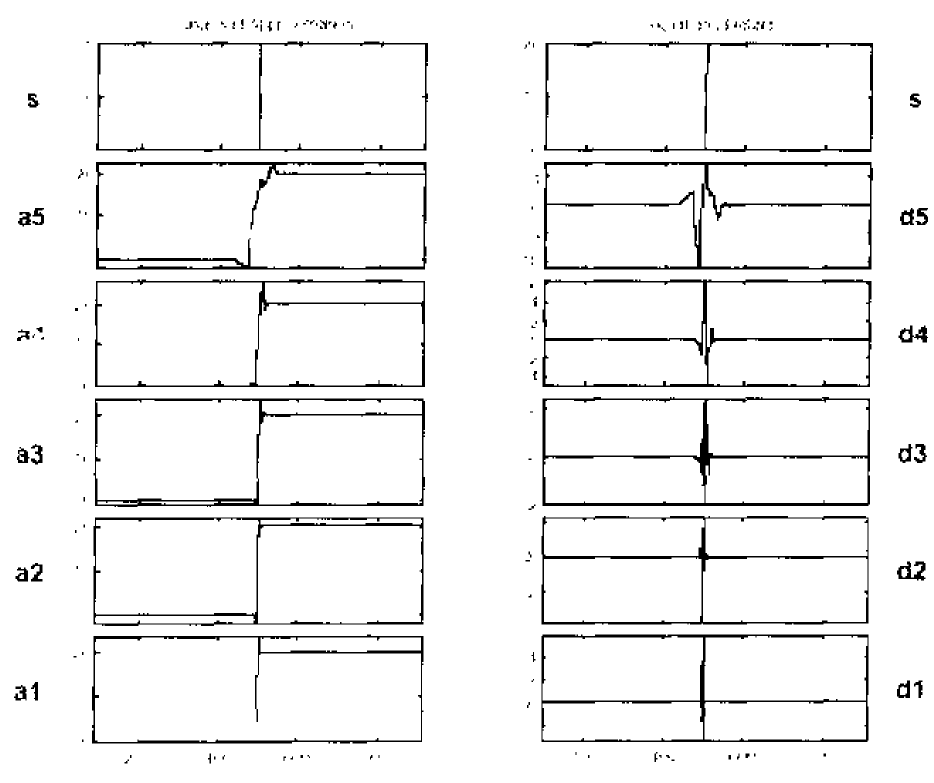


图 11.6　阶跃信号

总结：

例 6　阶跃信号	
重点上题	● 断点检测 ● 信号抑制 ● 长周期趋势检测 ● 确定细节分量与近似分量变化的范围大小
进一步讨论	● 利用与小波有关的 FIR 滤波系数检验 d1 的值 ● 用脉冲信号代替阶跃信号 ● 向信号中加入噪声，重新分析

例 7　两个距离接近的不连续点信号

小波类型：db2 和 db7

分解尺度：5

该信号由两段直线组成。一条直线有一定的斜率，中间是一段极短的直线形成的平台。观察原始信号，实际上很难用肉眼看得出这个“平台”. 因此，我们实行两次分析，一次是采用定位较好得滤波长度较短得 db2 小波（结果在左图），另一个是采用滤波器长度较长得 db7 小波（结果在右图)。两种情况都清楚地检测到了这个“平台”。在 d1 中，除了很有限的区间之外，其余部分均为 0。然而在“平台”范围内，db2 清晰地鉴别出信号的规则性（辨别出“平台”的起点和终点)，而在 db7 情况下，两个不连续点混在一起，只能从总体上说能够看出这个“平台”。这个例子说明识别两个紧挨着的一阶导数不连续的信号时，应选择滤波器长度较短的 db2 小波。再观察其它尺度下的近似分量，由于分辨率低，识别精度越来越差。小波滤除了直线变换的部分，从而可以分析信号的不连续性。

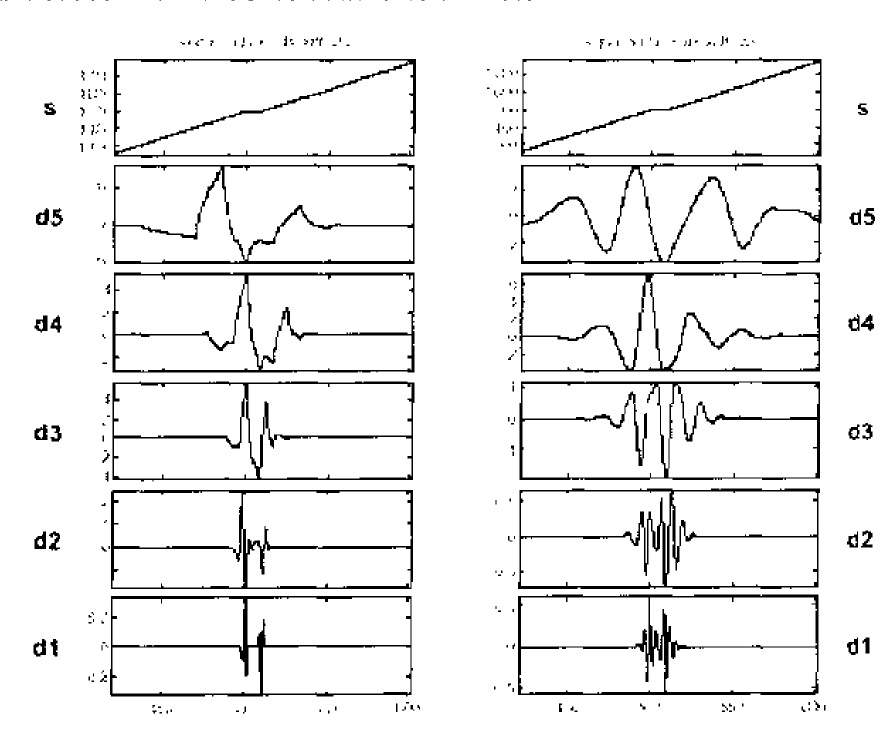


图 11.7　两个距离接近的不连续点信号

总结：

例 7　两个距离接近的不连续点信号	
重点主题	● 断点检测 ● 分析两个不连续点离的较近与分得较开时的信号
进一步讨论	● 向信号中加入噪声，直到看不见断点 ● 采用其它小波如 Haar 小波试一试

例 8　二阶导数不连续信号

小波类型：db1 和 db4

分解尺度：2

这个例子要说明信号的正则性是小波分析时选择小波类型的重要判据。信号由两个指数函数组成，两个信号在 0 点交会。分析信号就是对连续函数曲线采样得到的，采样间隔为 10^{-3}。对采样信号的分析采用两个小波：Haar 小波，正则性较差，分析结果为左图；还有就是 db4 小波，有很好的正则性，分析结果为右图。

在左图，我们注意到在 0 点处细节分量值等于 0 时根本未检测到正则性，黑色区域表示细节分量具有很强的波动。这些值等于函数与近似分量之间的差。在接近于 0 的地方，细节分量绝对值一边是缓慢减少，另一边是缓慢增加，这是由于函数的导数连续，且在 0 点处其导数值等于 0。由于信号非常光滑，不包含任何高频成分，所以细节分量的值很小（对于 Haar，其值为 10^{-3}，对于 db4 其值为 10^{-4}）。由于 db4 小波比 Haar 小波更光滑，所以 db4 的这个值更小些。

然而，利用 db4 却很好地检测到了信号的不连续点：在靠近 0 点细节分量的值很大，其余的地方几乎都为 0，这就是我们通过小波分析要得到的。对于本例这种情况，其结论就是选择的小波必须具有足够的正则性，即必须具有较长的滤波脉冲响应以便于检测信号的奇异性。

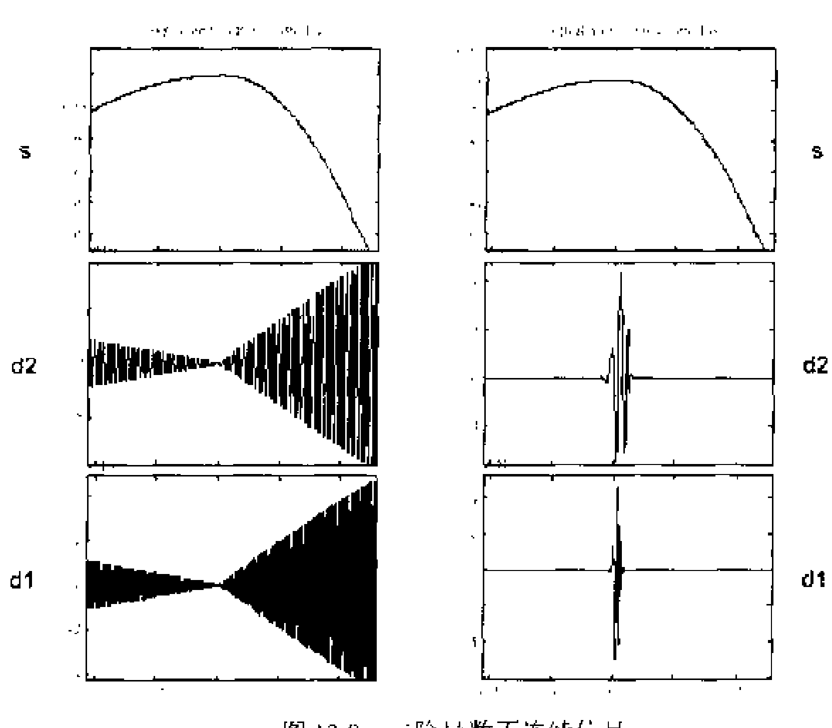


图 13.8　二阶导数不连续信号

总结：

例 8　一阶导数不连续信号	
重点主题	● 断点检测 ● 信号抑制 ● 识别有一定难度的不连续信号 ● 仔细选择小波以达到需要的效果
进一步讨论	● 采用 Haar 小波，计算细节分量的值 ● 加入噪声直到看不出突变点

例 9　斜坡信号+白噪声

小波类型：db3

分解尺度：6

本例中的信号为一倾斜信号加上白噪声,倾斜部分在时间轴上从开始到 500 点为一条其值由 0 缓慢上升到 3 的直线，500 点之后为常数,噪声均值为 0，变化范围−0.5~0.5。

在右图上，我们再次发现细节分量包含的是噪声。而在左图，近似分量逐渐精确近似到斜坡信号，随着尺度的增加，包含的噪声越来越少。在尺度为 3 时，近似部分与斜坡曲线已相当接近，在尺度等于 6 时，已很好地重构出这个倾斜信号。

由此就可以将斜坡信号与噪声信号分离开。虽然噪声对所有尺度分量都有影响，但当分辨率较低时，近似分量中的噪声已非常少，从而可以恢复出斜坡信号。另外值得注意的是，斜坡曲线的断点在图中显示得很清晰，这是由于斜坡信号是在分辨率很低的情况下恢复的。

加入的单一噪声说明，在信号中存在较高与较低频率成分时，采用半波和方法（half sums）可以得到斜坡信号最佳的估计。不过该方法对其他噪声可能不适用。

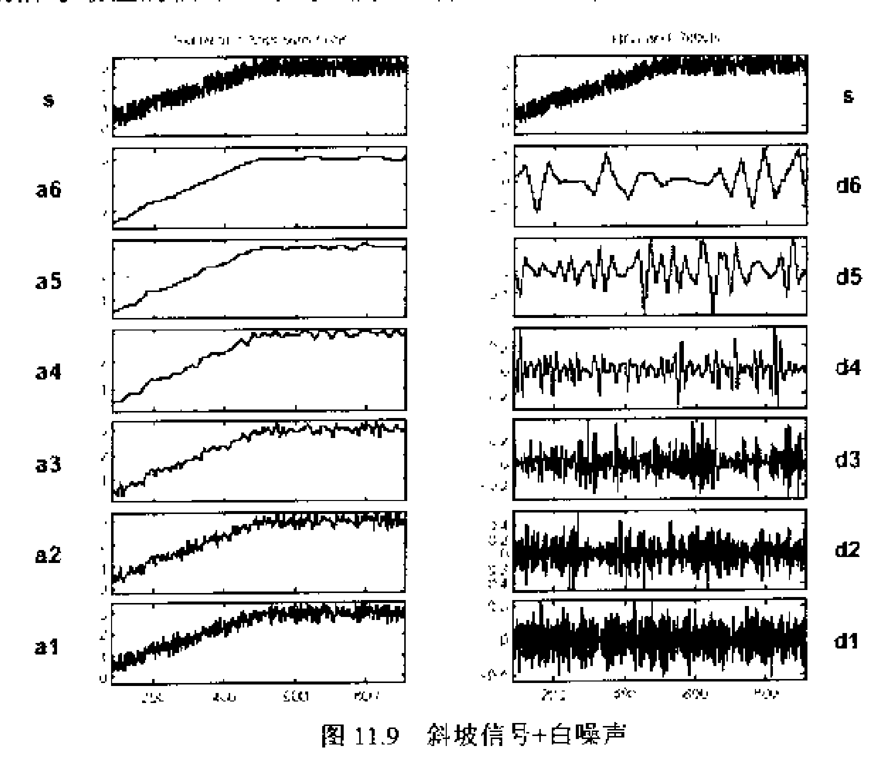


图 11.9　斜坡信号+白噪声

总结：

例 9　斜坡信号+白噪声	
重点主题	● 断点检测 ● 噪声处理 ● 长周期趋势估计 ● 信号成分分离 ● 识别噪声与近似部分 ● 比较图 11.3 的白噪声 $b_1(t)$ ● 确定几乎完全抑制噪声所需的尺度值
进一步讨论	● 改变噪声

例 10　斜坡信号+有色噪声

小波类型：db3

分解尺度：6

信号的构成与上一个例子类似，为一倾斜信号加上噪声。在时间从 1 到 500 点时，倾斜部分幅值由 0 变到 1，其余部分信号值为常量。噪声信号为零均值的 AR(3)噪声，幅值变化范围为-3~3（见分析信号 b_2），噪声强度为信号强度的 6 倍。粗看起来，根据斜坡信号与噪声分离的情况，结果比上一个例子的要稍微差一点。其实，这是一个误解，因为在频率域，两个信号分量被精确分开了。

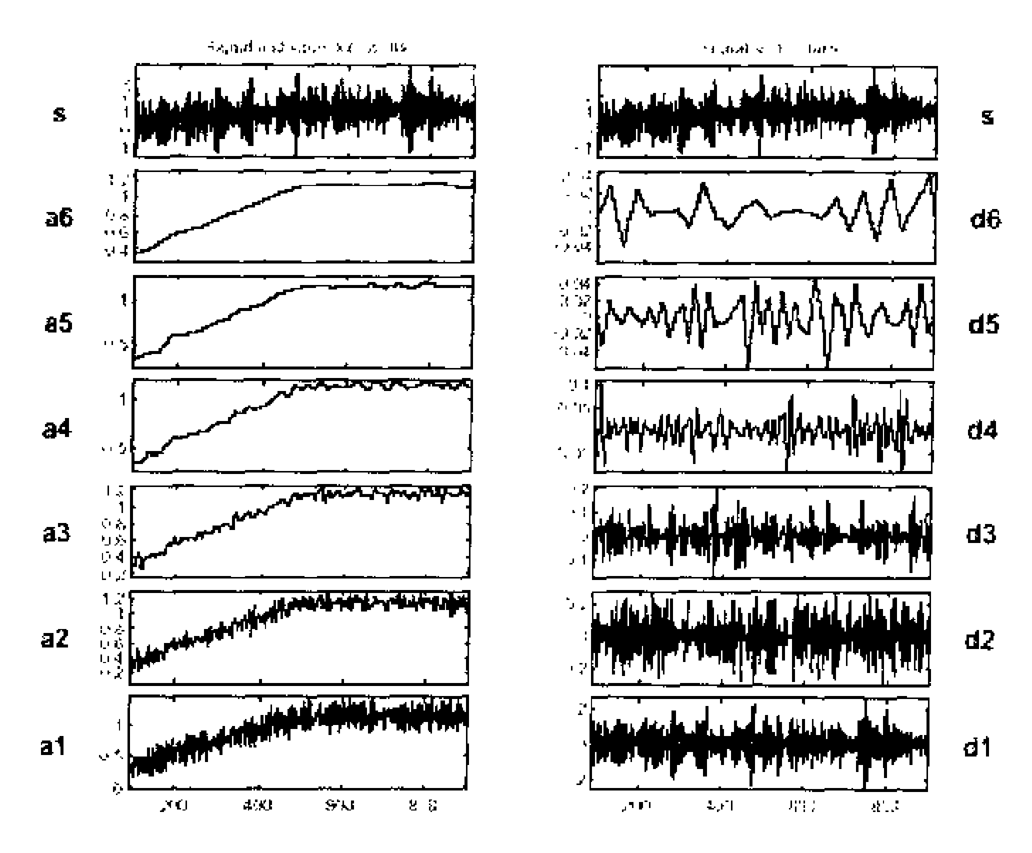


图 11.10　斜坡信号+有色噪声

总结：

例 10　斜坡信号+有色噪声	
重点主题	● 断点检测 ● 噪声处理 ● 长周期趋势估计 ● 信号成分分离 ● 识别噪声与近似部分 ● 比较图 11.9 的信号 $s_7(t)$ ● 确定几乎完全抑制噪声所需的尺度值
进一步讨论	● 识别噪声特征：在命令行模式下利用分析系数

例 11　正弦信号+白噪声

小波类型：db5

分解尺度：5

本例中分析的信号由前面曾经分析过的两个信号分量的和组成：周期为 200 的慢变正弦波和单一白噪声 b_1。本例是要演示小波分析的线性特征：对两个信号之和的分析等同于对两个信号分别分析的和。

细节分量就是分析过程中分离出来的白噪声。

正弦波信号出现在近似部分 a5 中。相对于正弦信号的幅值来说，在这个尺度下，噪声可以忽略不计了。

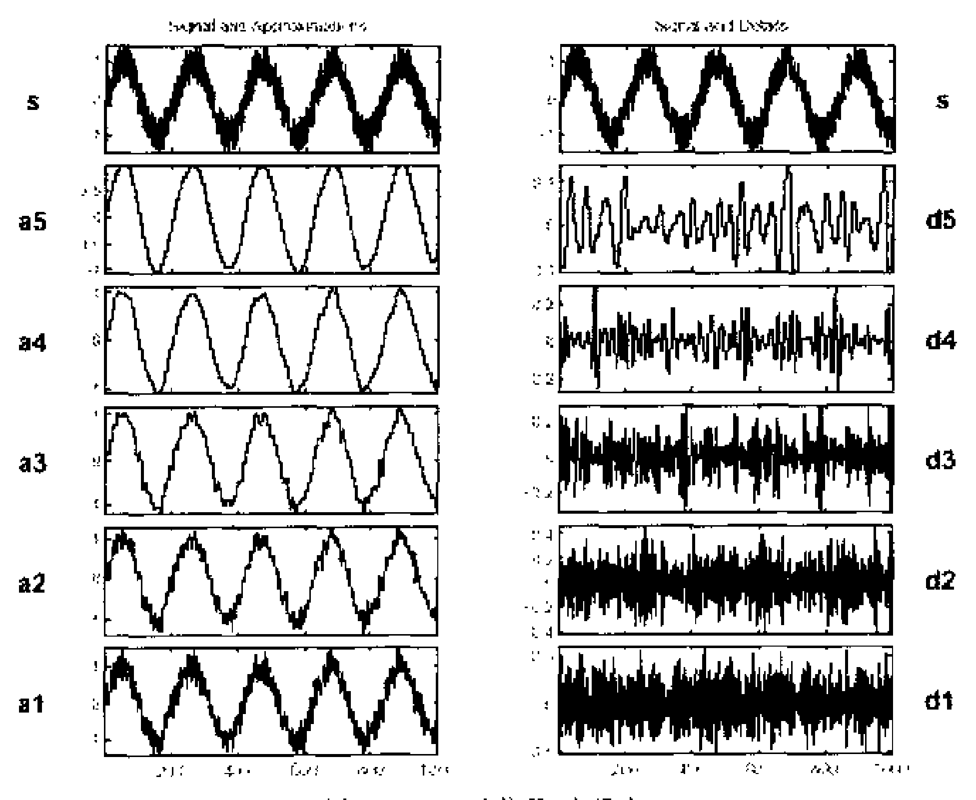


图 11.11　正弦信号+白噪声

总结：

例 11　正弦信号+白噪声	
重点主题	● 噪声处理 ● 长周期趋势估计 ● 信号成分分离 ● 识别正弦信号频率
进一步讨论	● 识别噪声特征：在命令行模式下利用分析系数

例 12　三角形信号+正弦信号

小波类型：db5

分解尺度：6

本例这个信号是一个周期约为 20 的正弦信号加上一个“三角形”组成的。

d1 和 d2 幅值很小。这说明与采样周期相比，信号中不包含如此短周期的信号成分。

d3 特别是 d4 可以看作是信号中包含的正弦信号。从 a3 到 a4，正弦信号的跳变清晰可见。

较高尺度下的细节分量幅度很小，特别地，d5、d6 说明了某种边沿效应。

a6 就是只包含低频成分的三角形信号。

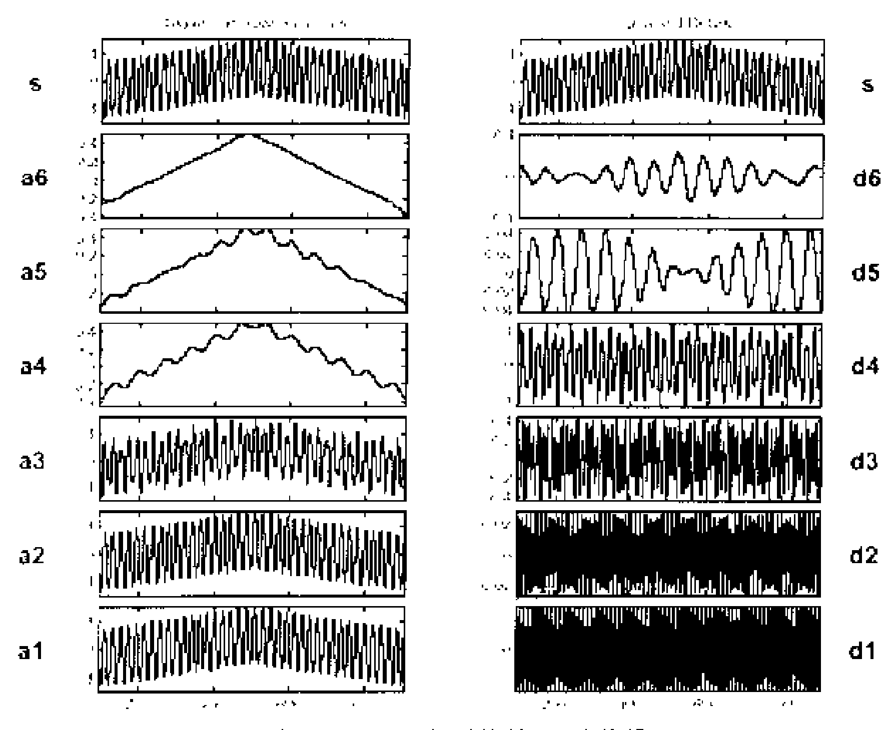


图 11.12　三角形信号+正弦信号

总结：

例 12　三角形信号+正弦信号	
重点主题	● 长周期趋势检测 ● 信号成分分离 ● 识别正弦信号频率
进一步讨论	● 试一试频率为 2 的幂次方的正弦信号

例 13　三角形信号+正弦信号+噪声

小波类型：db5

分解尺度：7

本例这个信号与前一个例子相似，只是加上了一个白噪声，然后除以 3，因此分析结果可以与前一个例子比较，如果存在差异，那都是噪声引起的。

d1 和 d2 主要是噪声。

d3 特别是 d4 是正弦信号。

在尺度值愈高时，细节分量愈小，这是由于噪声引起的。

a7 为三角形曲线，虽然重建的效果没有上一个例子那么好。

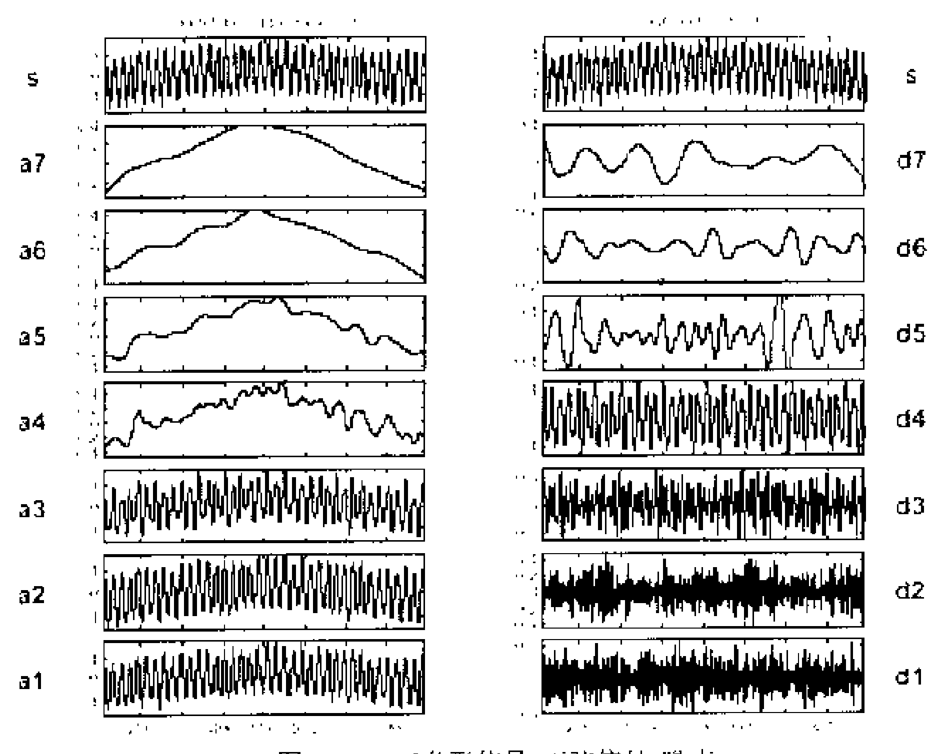


图 11.13　三角形信号+正弦信号+噪声

总结：

例 13　三角形信号+正弦信号+噪声	
重点主题	● 长周期趋势检测 ● 信号成分分离
进一步讨论	● 增加噪声幅度 ● 由多项式信号替代三角形函数 ● 由 ARMA 噪声替换白噪声

例 14　实际的电耗信号

小波类型：db3

分解尺度：5

本例信号在中部有一较大的波峰，伴随两次衰减，一次较大的衰减，然后是很小的波峰。尺度为 1 和 2 时的细节分量的幅度量级相同，并且很好地反映了由于噪声造成的局部不

规则影响。尺度为 3 时的细节分量在上峰开始与结束时表现出很高的值，由此可以确定衰减的位置。细节分量 d4 在形态上与原信号相似，也有三个连续的峰值，这与原信号曲线形态符合得非常好，并且其中包含了周期小于 32 个单位时间的基本信号成分。近似分量更加清晰：a1 和 a2 具有强烈的相似性，a3 与原信号近似得更加精确。但是，观察 a4，与原信号相比，丢失了大量的信息。

对于这种情况，其结论是，多尺度分析是小波分析中人们最感兴趣也是最有意义的特性：在得到的周期小于 32 个单位时间的电耗信号（类似 a5）中的基本频率成分为周期在 8 到 16 单位时间之间。

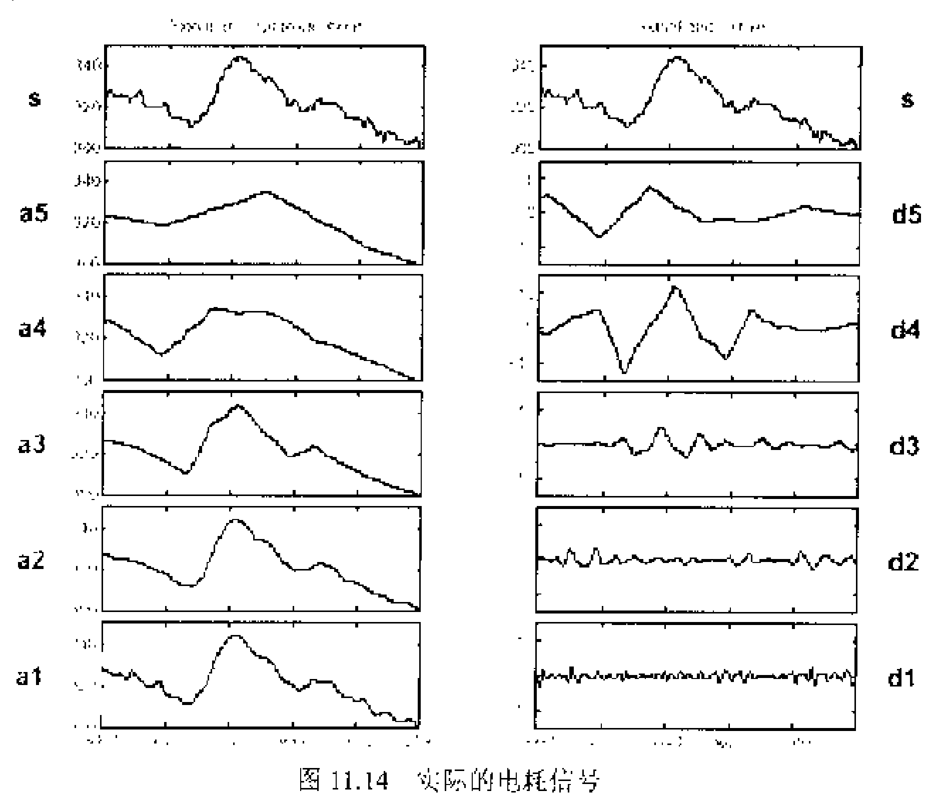


图 11.14　实际的电耗信号

总结：

例 14　实际的电耗信号	
重点主题	● 长周期趋势检测 ● 分离信号分量 ● 断点检测 ● 多尺度分析
进一步讨论	● 试着分析该信号的其它信号段，重点是这里显示的[3600—3700]段之外的部分

第十二章　小波包应用

使用小波包工具箱有图形界面和命令行函数两种方式，通过这个工具我们能够：

- 检验和研究各个小波包的性质；
- 运用小波包分析一维和二维信号；
- 采用小波包去噪及对图像进行压缩。

本章通过示例引导你一步一步地说明如何使用 Wavelet Packet 1-D 和 Wavelet Packet 2-D 图形工具。最后一节讨论怎样把图形工具信息保存到磁盘上。

由于小波包分解树结构本身很复杂，我们推荐使用 Wavelet Packet 1-D 和 Wavelet Packet 2-D 图形工具来进行分析。

也可以采用命令行函数，并且也能达到同样的效果。但用命令行函数来进行批处理会更有效。

§12.1　关于小波包分析

本章利用 MATLAB 小波工具箱，向你介绍一维及二维小波包分析的特点。你将学习：

- 如何载入信号或图形；
- 如何对信号或图形进行小波包分析；
- 如何压缩图像；
- 统计量分析及柱状图分析。

小波工具箱为小波包分析提供了如下一些函数（更多的信息请查看后面的 MATLAB 命令参考）。

（1）分析-分解函数：

函数名称	功　能
Wpdec 及 wpdec2	小波包完全分解
Wpsplt	分解包（按节点）

（2）合成-重建函数：

函数名称	功　能
Wprcoef 及 wpdec2	重建系数
Wprec	小波包完全重建
Wpjoin	重建包（联合节点）

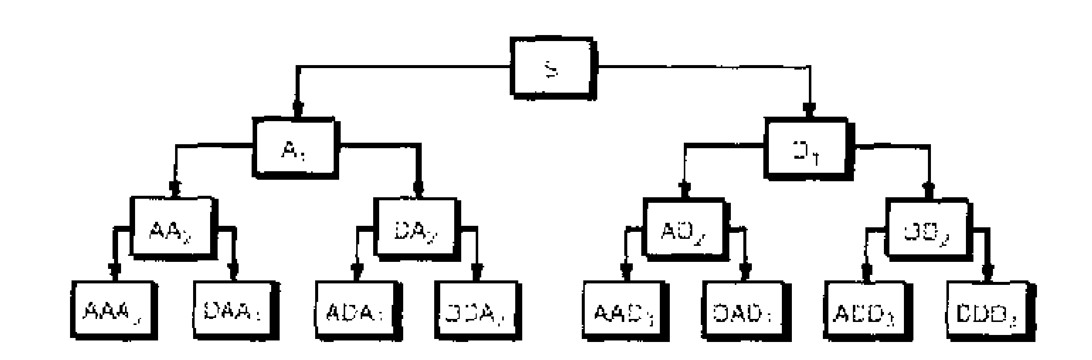
（3）分解结构应用：

函数名称	功　能
besttree	寻找最佳分解树
bestlevt	寻找最佳分解尺度树
Wentropy	熵
Entupd	更新小波包熵

（4）信号去噪与压缩：

函数名称	功　　能
ddencmp	生成信号去噪与压缩时需要的缺省参数值
wpthcoef	小波包系数阈值
wpdencmp	使用小波包进行信号去噪与压缩

在小波包框架下，信号压缩与去噪声思想与小波框架下的完全一样，仅有的区别就是小波包分析更复杂也更灵活，那是因为在小波包分析中，对细节部分也像对近似部分一样进行了分解。小波包分解结构如下图所示。



小波包分解有很多的方法，在某个设定的熵准则条件下，通过寻找“最佳树”，得到对不同对象的最佳分解表示。

信号去噪与信号压缩是小波包分析很有意思的应用。小波包方法进行信号去噪与压缩的过程有如下四个步骤：

（1）分解：

给定一个小波，计算信号 x 在尺度 N 时的小波包分解；

（2）计算最佳分解树：

给定一个熵值，计算最优小波包分解树。当然，这一步是可选的。在图形界面中提供了 Best Tree 按钮，使这一步的计算既快又简单。

（3）确定小波包系数阈值：

对每个小波包（近似部分除外），选择阈值并与小波包系数进行比较。

在平衡压缩量与保留部分的能量之间关系的情况下，图形工具自动提供一个初始阈值。多数情况下，这个值就是第一级近似。但是，通常情况我们还得用试错法调整这个阈值，以使得对不同的情况都有最优的结果。

在图形工具下，我们可以很方便地采用不同的阈值进行试验，也很容易改变压缩量与保留部分之间的协调系数。

（4）重建：

当尺度等于 N 时，在原来的近似系数和修改了的系数基础上进行小波包重建。

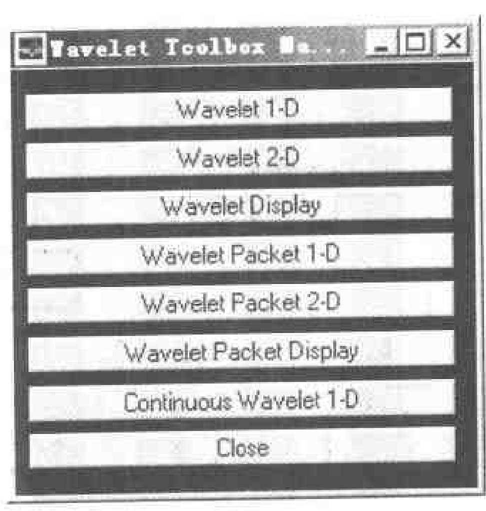
在接下来的例子中，就会向你展示如何利用小波包分析来进行信号压缩与去除噪声。

§12.2 一维小波包分析

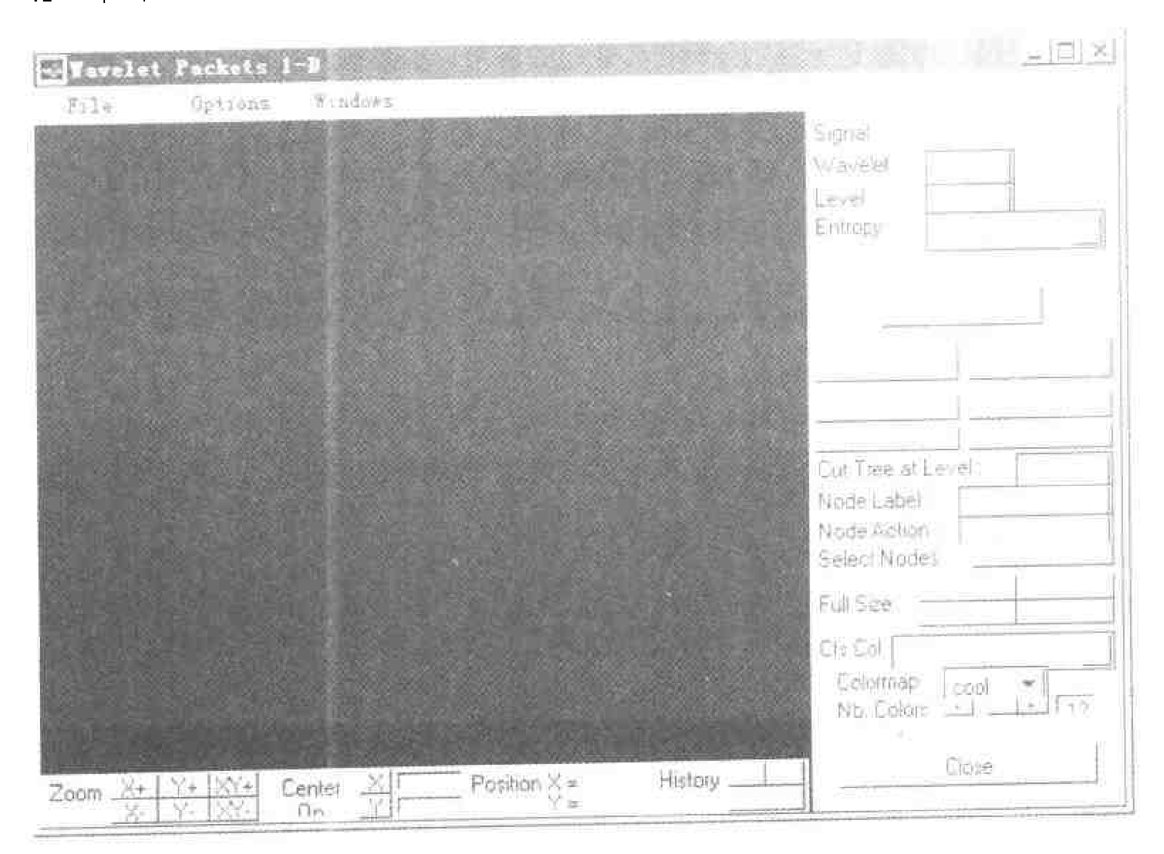
现在让我们使用 Wavelet Packet 1-D 工具来分析由两个线性调频信号相加而得的合成信号。

- **启动一维小波包分析工具**

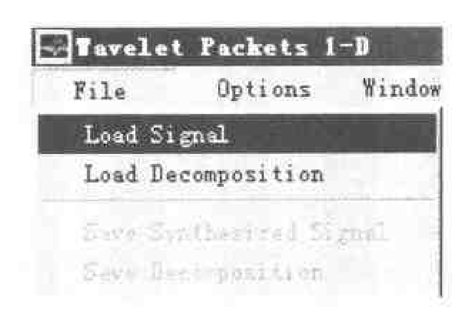
(1) 在 MATLAB 提示符下，输入 wavemenu，屏幕上就会弹出 Wavelet Toolbox Main Menu (小波工具箱主菜单）窗口。



（2）单击 Wavelet Packet 1-D 菜单项，屏幕上弹出小波包分析工具窗口如下：



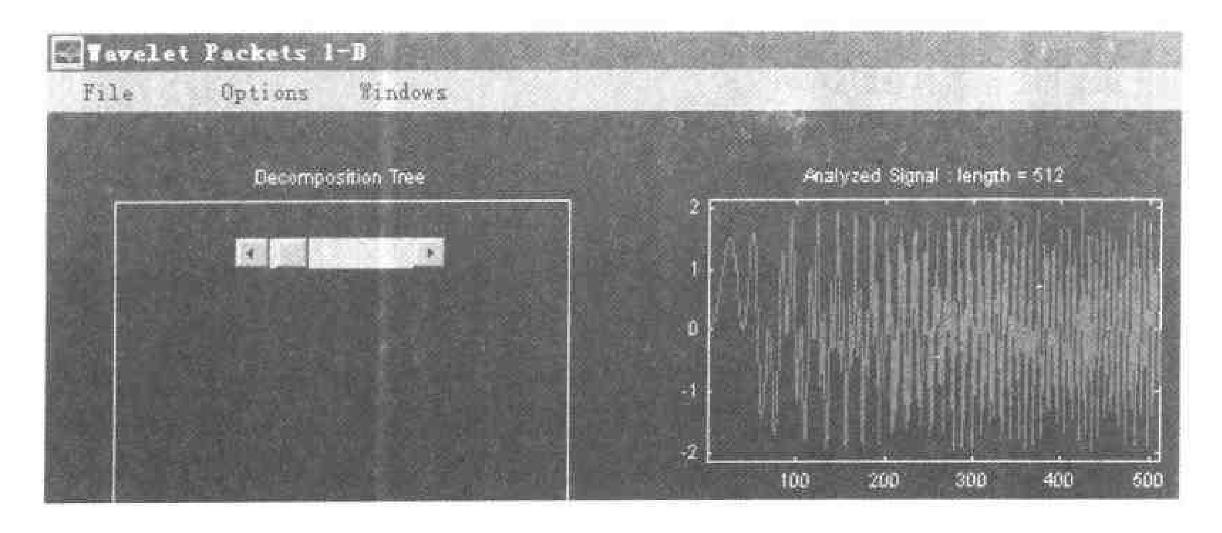
（3）接下来是要载入一个信号。在 File 菜单下，选择 Load Signal（载入信号）菜单选项。



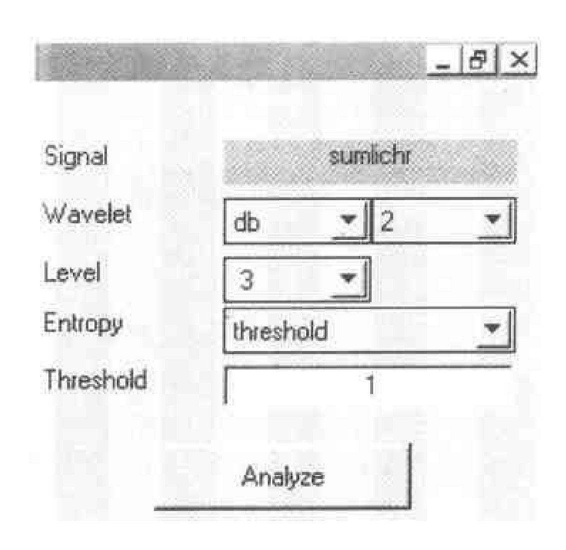
（4）当 Load Signal 对话框弹出后，选择演示文件 sumlichr.mat，该文件的路径应该是 MATLAB 目录下的 toolbox\wavelet\wavedemo 子目录下，按“打开”按钮。

Load Signal
搜寻(I): wavedemo
noissi2d　scddvbrk　sumsin　warma
noissin　sinfract　tartan　wbarb
noiswom　sinper8　tire　wcantor
qdchirp　sinsin　trsin　wgatlin
quachirp　sumlichr　vonkoch　whitnois
文件名(N): sumlichr.mat　打开(O)
文件类型(T): Mat files (*.MAT)　取消

信号 sumlichr 就被调入 Wavelet Packet 1-D 工具中了。



（5）下面就是对信号进行分析，首先必须设置适当的分析参数。选择小波类型 db2，尺度水平 4，熵类型为 threshold，阈值参数 1。单击 Analyze（分析）按钮。



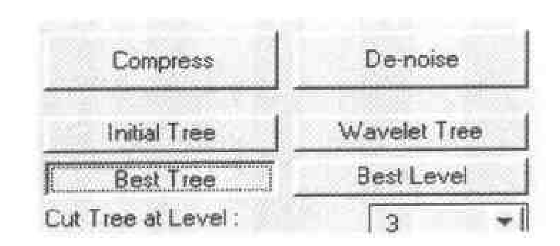
有效的熵类型如下：

类　型	说　明
Shannon（香农熵）	非正则熵，为各个样点值平方取对数，或由下式表示： $-\sum s_i^2 \lg(s_i^2)$
Threshold（阈值熵）	信号绝对值超过阈值 ε 的样点个数
Norm（范数熵）	l^p 范数集中度，$12 \leqslant p < 2$
Log Energy（能量对数熵）	"能量"的对数，定义为样本总体能量和：$\sum \lg(s_i^2)$
SURE（Stein's Unbiased Risk Estimate）（Stein 无偏风险估计）	为一种基于阈值的方法，阈值等于： $\sqrt{2\ln(n\log_2(n))}$ 这里 n 为信号样本数。
User（用户自定义熵）	用户以 M 文件格式自定义的熵类型判据

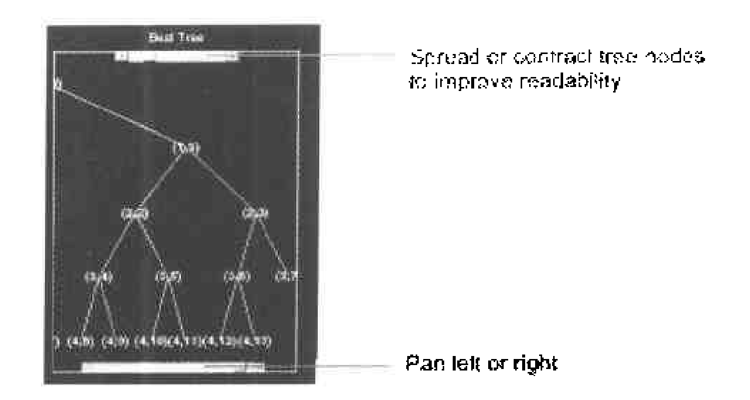
● **计算最佳的小波包分解树**

根据小波包分解树重建原信号有很多种方法，在信号压缩前选择最优的分解路径。

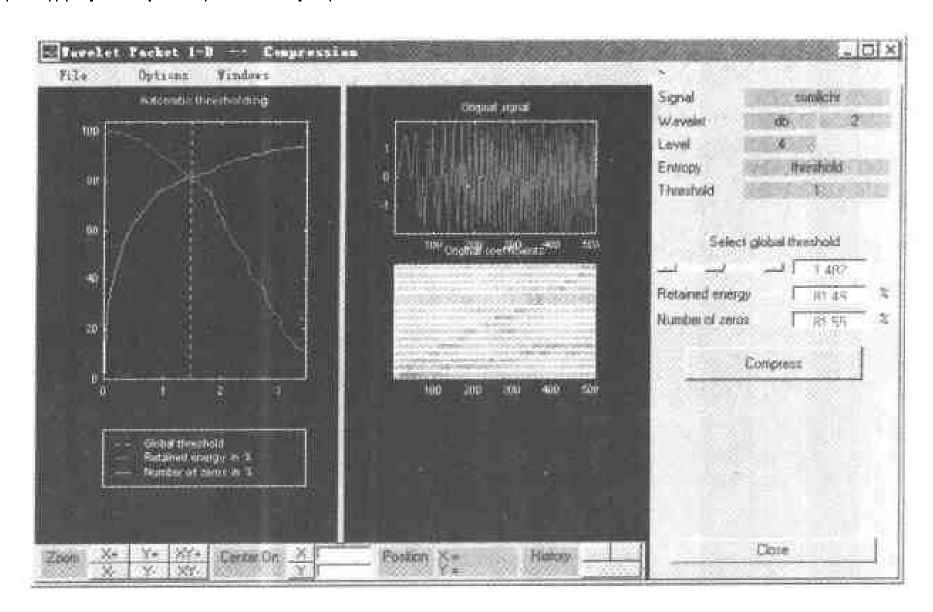
（6）单击 Best Tree（最优树）按钮。



稍后，在 Wavelet Packet 1-D 工具窗口界面上显示出最优树。在分解树窗口上端和下端各有一个滑动条，按动这两个滑动条可以展开分解树节点以便能更清楚地观测分解树目录。



（7）如果要进行信号压缩，单击 Compress（压缩）按钮。Wavelet Packet 1-D Compression（一维小波包信号压缩）窗口出现在屏幕上，并自动给出了大概的阈值。

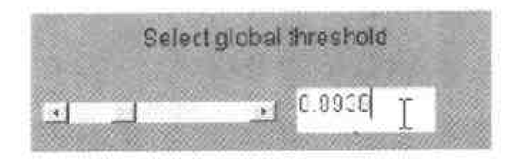


上图中最左边的图表示了阈值（黄色垂直点划线）（1.482）是如何在设置零点数目（蓝色曲线，随着阈值的增加而增加）与保留信号（紫色曲线，随着阈值的增加而减少）之间寻求平衡。

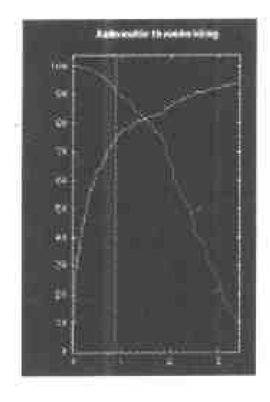
这个阈值的意思就是，只要信号的值小于 1.482，那么在进行信号压缩时，就会将其设置为 0。

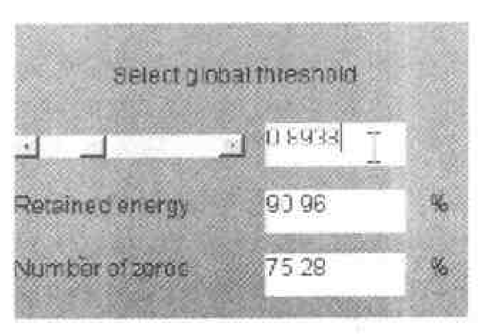
上图中右侧，有一个控制阈值的滑动条。需要注意的是这里自动给出的阈值 1.482 可以保留 81.49%的能量。这样就可能造成数据过多损失，特别是如果损失的是振动信号的峰值点的话，将是不能接受的。根据你自己的设计准则，你可以选择阈值，使得压缩信号中能够保留较多的信号能量。

（8）在阈值输入框中输入阈值 0.8938，按回车键（这个阈值是经过试错法获得的，对于这里的例子，选择这个值能够得到较满意的结果）。



稍过一会儿，Wavelet Packet 1-D Compression（一维小波包信号压缩）窗口上显示出新的内容。





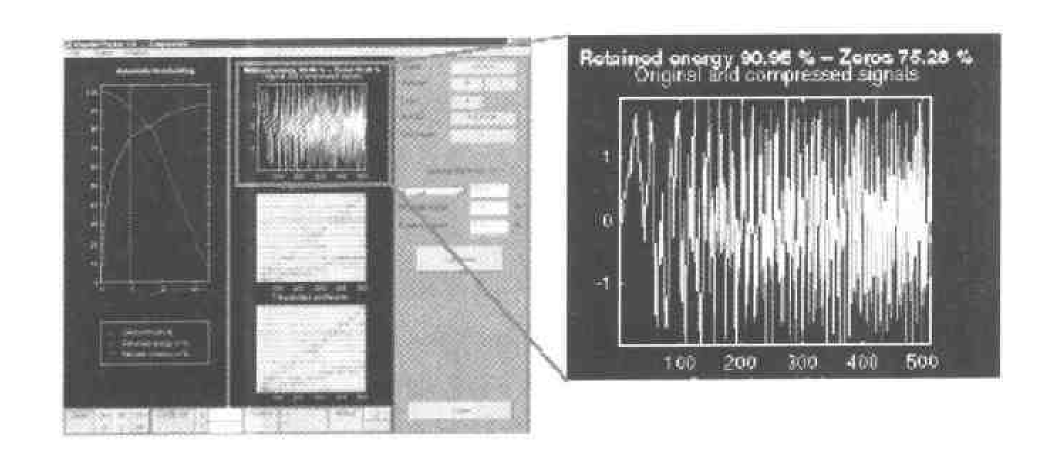
注意，由于阈值从 1.482 减少到 0.8938，故：

① 黄色垂直点划线移向左侧；

② 保留的信号能量从 81.55%增加到了 90.96%；

③ 零点数目从 81.55%减少到了 75.28%。

（9）前面先介绍了如何选择压缩阈值，接下来就要开始实际的信号压缩了。在 Wavelet Packet 1-D Compression（一维小波包信号压缩）窗口右侧点击 Compress 按钮，程序就按照我们选定的阈值准则开始压缩信号。



图中原始信号（红色）与压缩信号（黄色）重叠画在一起，从肉眼来看，压缩质量相当不错。

仔细观察压缩后的信号，我们看到在压缩信号的小波包表示中，零点约占 75.3%，而保留的能量约 91%。

如果仍然选取差不多同样的参数而利用小波方法来压缩同一个信号，你会发现只有 89%的信号能量被保留下来，小波系数也只有 59%被设置为零。这说明了小波包在信号压缩方面的优势，至少对某些信号来说是这样。

你也可以返回 Wavelet Packet 1-D 窗口，自己试一试，先计算小波分解树，然后重新进行压缩处理。

§12.3 利用小波包进行信号去噪

现在我们利用 Wavelet Packet 1-D 工具来分析一个带噪声的调频信号，说明在信号去噪时采用 Stein's Unbiased Estimate of Risk（SURE，斯坦恩无偏风险估计）作为阈值选择准则时的用法。这里阈值 T 设为

$$T=\sqrt{2\ln(n\log_2(n))}$$

其中 n 为信号长度。

如果信号是归一化的，即满足 $x(t)=f(t)+e(t)$，这里 $e(t)$ 表示具有零均值和单位方差的高斯白噪声，那么使用这种方法效果更佳。

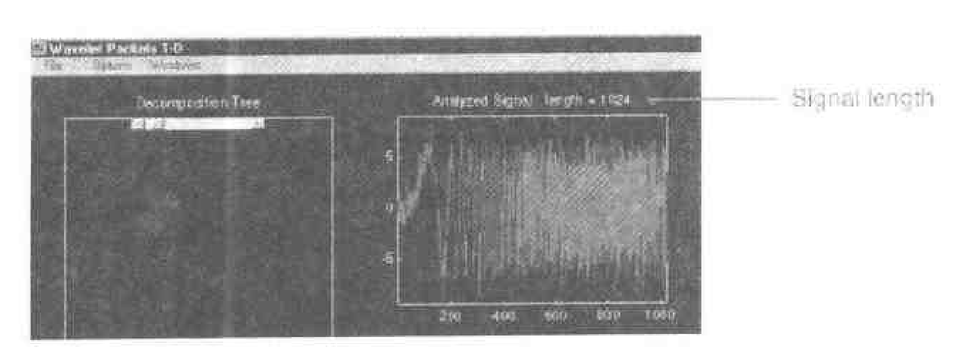
如果你已经启动了 Wavelet Packet 1-D 工具并且在计算机桌面上处于活动窗口界面，请转至第（3）步。

（1）启动 Wavelet Packet 1-D 工具。在 MATLAB 提示符下，输入 wavemenu，出现如下小波工具箱主菜单。

（2）单击 Wavelet Packet 1-D 菜单项，弹出工具界面。

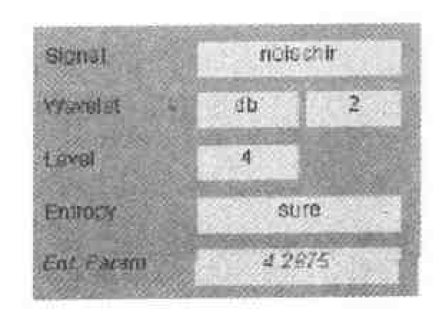
（3）载入一个信号。在 File 菜单中，选择 Load Signal 选项。

（4）当信号对话框出现时，选择 MAT 演示文件 noischir.mat，该文件应该位于 MATLAB 目录下的 toolbox\wavelet\wavedemo 子目录下。单击 OK 按钮。



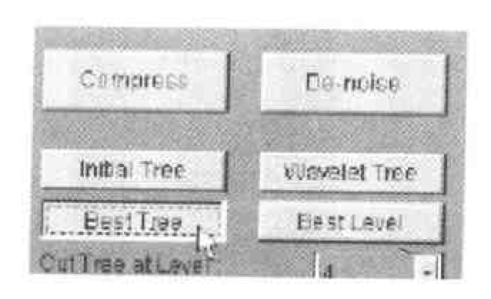
信号 noischir 被调入 Wavelet Packet 1-D 工具的工作空间，注意信号长度为 1024，这意味着 SURE 准则阈值应设为 *sqrt*(2.*log(1024.*log2(1024)))，或者 4.2975。

（5）下面就来对信号进行分析。首先设置适当的分析参数，选择小波类型 db2，尺度水平 4，熵类型为 SURE，阈值参数为 4.2975。然后单击 Analyze 按钮。

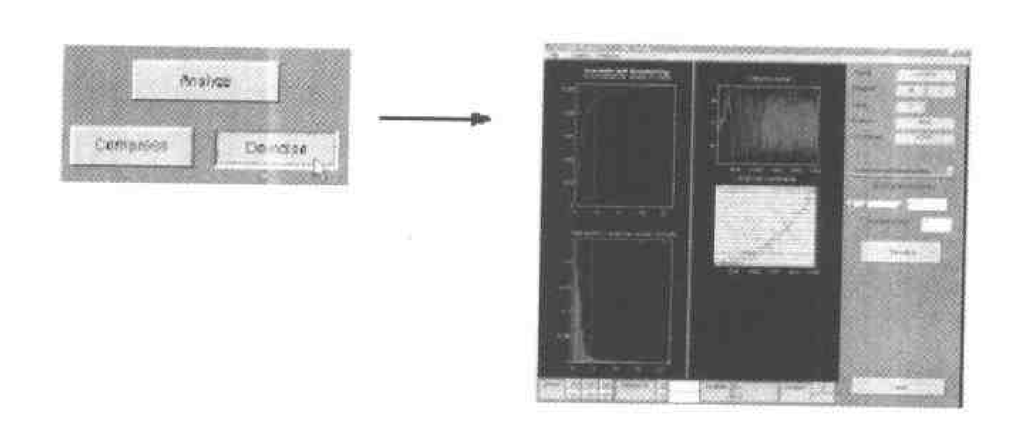


下面是计算最优分解树和完成去噪声操作。

（6）单击 Best Tree 按钮。计算最优分解树能够更有效地去除噪声。



（7）单击 De-Noise 按钮，激活 Wavelet Packet 1-D De-Noising 窗口。



（8）用鼠标单击位于去噪窗口右侧中间位置的 De-Noise 按钮。

从去噪后的系数曲线可以看到，去噪结果相当好。调频信号的频率随时间呈二进制增加，在时-频平面上我们也可以看到去噪后信号频率与时间呈二倍关系。

在命令行方式下，利用一个 M 文件 wpdencmp，我们也可以进行小波包去噪与信号压缩处理。

§12.4　二维小波包分析

本节我们将利用二维小波包（Wavelet Packet 2-D）工具来分析图像信号，并对一个指纹图像进行压缩。这是一个实际问题：联邦调查局（FBI）拥有一个庞大的指纹数据库——约 3 千万套。存储这些数据耗资上亿美元。借助于小波包，FBI 成功地对数据进行了压缩，压缩的比例达到了 15∶1。实际应用中，采用小波的方法比传统的 JPEG 压缩方法要好得多，因为它能够消除较小的方块或直角图案，因而特别适合于检测指纹图像中的不连续点（线）。

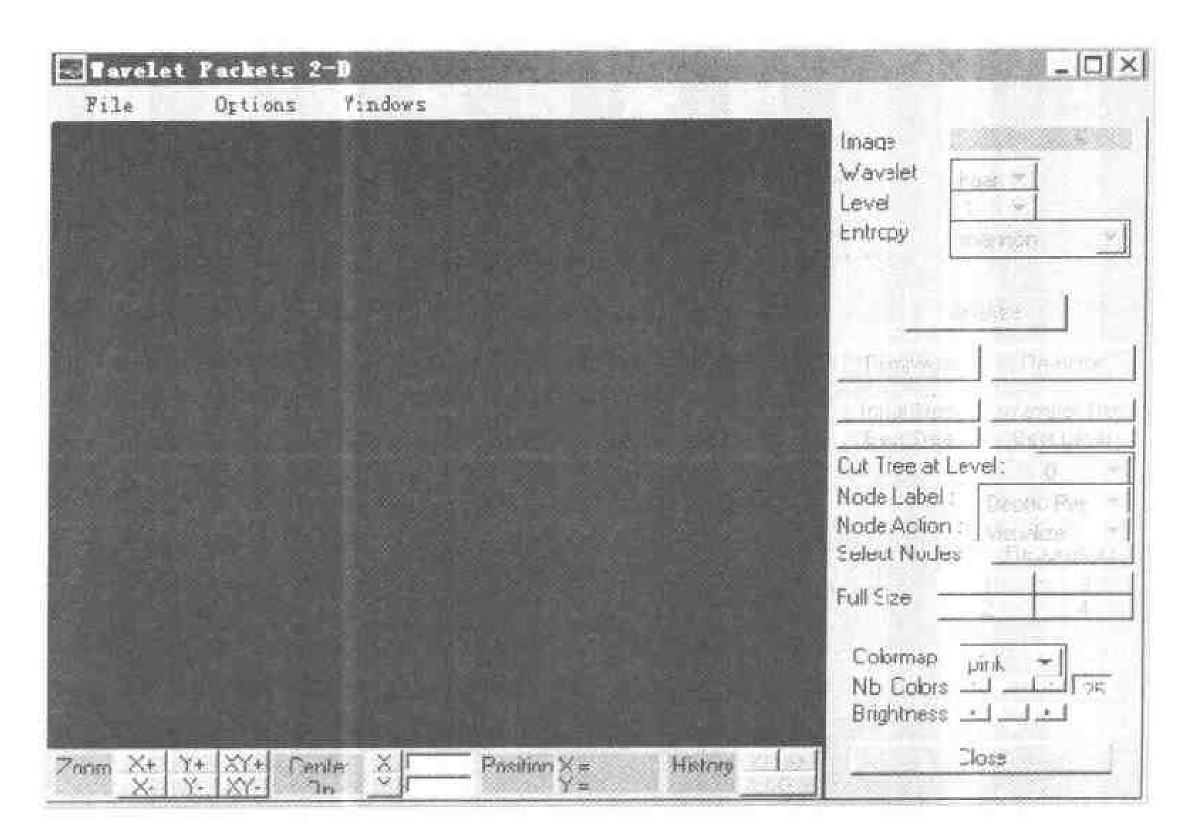
利用二维小波包（Wavelet Packet 2-D）工具来进行二维小波包分析的步骤如下：

（1）　在 MATLAB 提示符下，输入：

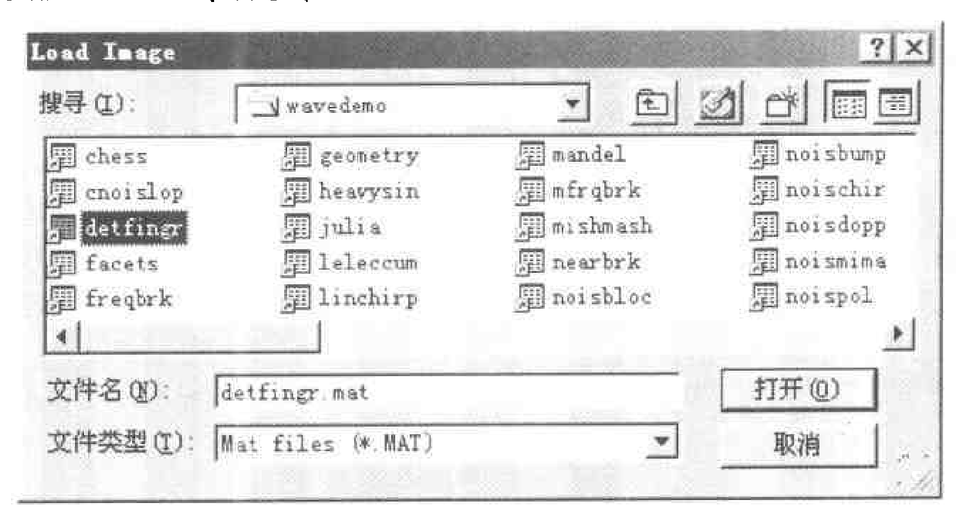
```
>> wavemenu
```

这时，屏幕上会弹出小波工具箱主菜单（Wavelet Toolbox Main Menu）。

（2）　鼠标点击 Wavelet Packet 2-D（二维小波包）菜单项，此时，桌面上就会出现二维小波分析工具界面窗口。



（3）调入一个用于分析的图像数据文件。在 File 菜单下，选择 Load Image 项，出现选择图像文件的对话框。我们选择示例文件 detfingr.mat，这个文件位于 MATLAB 目录下的 toolbox/wavelet/wavedemo 子目录中。



鼠标单击“打开”按钮，文件就被调入工作空间中了。下面，我们就可以对这个图像进行分析了。

（4）对分析参数进行适当的设置。如选择 Haar 小波，分析尺度设为 3，熵的类型设置为 shannon。然后单击 Analyze（分析）按钮。

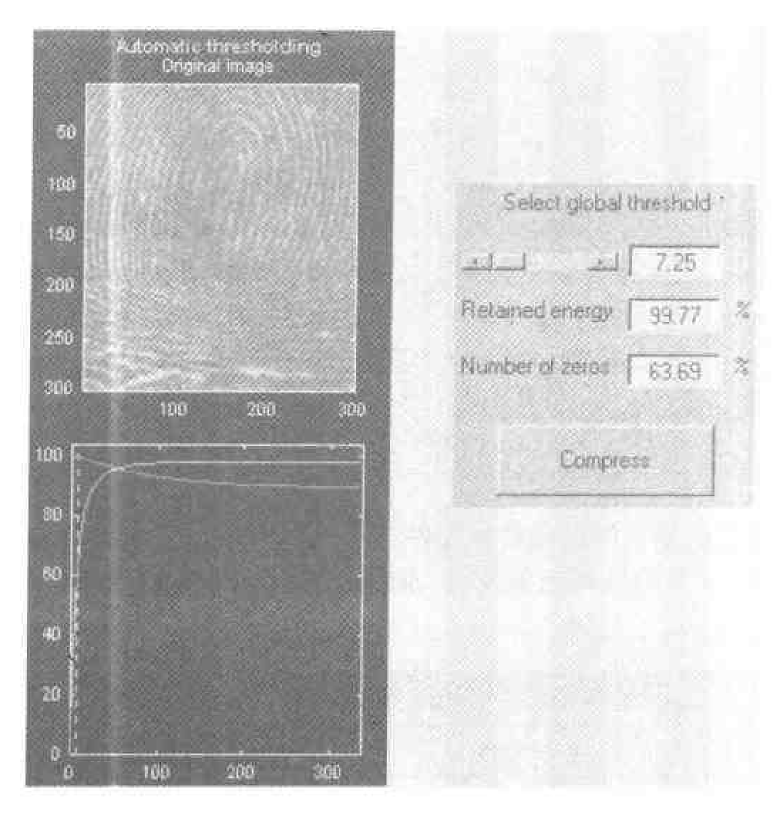
（5）在对图像进行压缩之前，单击 Best Tree 按钮计算小波包分析的最佳分解树。

Compress　　De-noise

Initial Tree　　Wavelet Tree

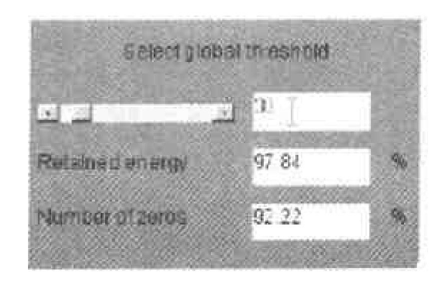
Best Tree　　Best Level

（6）下面就可以对图像进行压缩了。单击 Compress 按钮，就打开了 Wavelet Packet 2-D Compress（二维小波包压缩）窗口。



注意：缺省的阈值（7.25）可使得实际上保留几乎原来图像全部的能量的同时，使压缩率达到 64%。当然，如有必要，可以试着调整阈值的大小，以取得更高的压缩效果。回想一下，到目前为止，我们还不曾对图像做过什么量化处理，也几乎没有设置什么参数，从广义上讲，到这一步，只能算是预压缩。

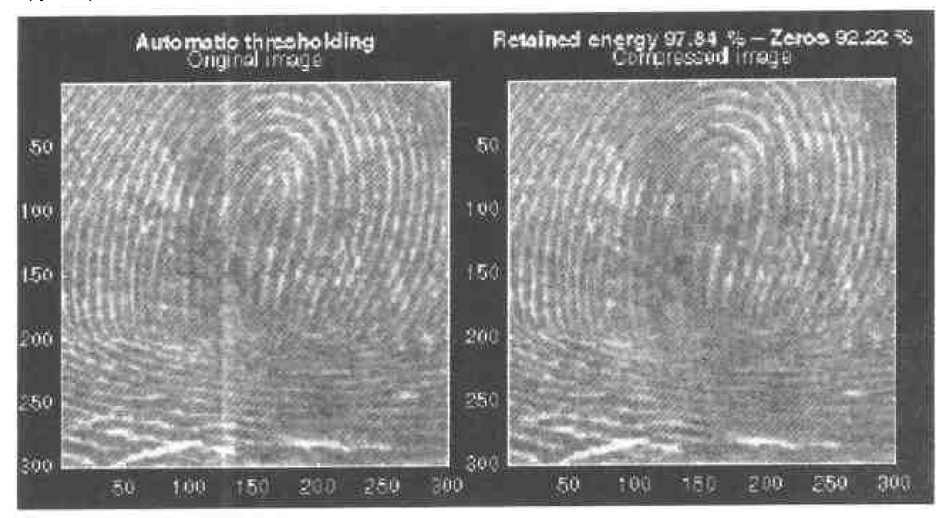
（7）改变阈值：在位于窗口右边阈值滑动条右侧的文本框中输入 30，然后按回车键。



将所有小于 30 的小波包系数设置为 0，得到的效果更好，使压缩率达到 12∶1，却仍然

保留了几乎98%的图像能量。读者不妨将这里的结果与第十章“信号压缩”一节的结果作一个比较。

（8） 点击“Compress（压缩）”按钮。我们可以看到根据小波包系数阈值法得到的结果而重建的图像，从视觉效果来看，重建的结果是正确的，但不是那么完美，与原图相比，重建的图像多少有些像“赝品”的感觉。

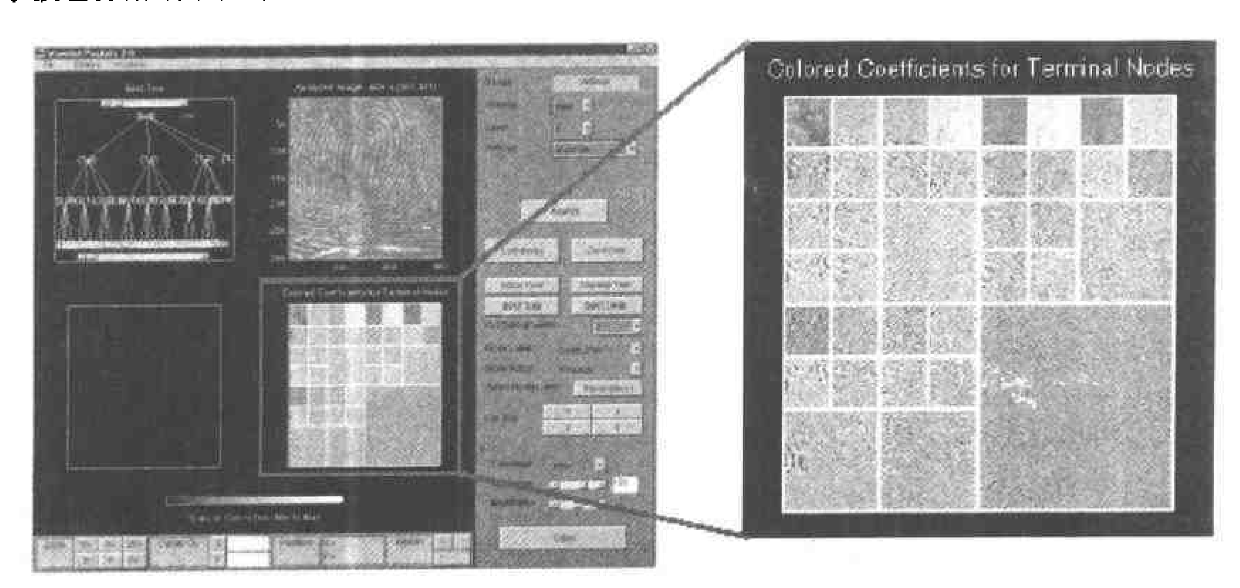


（9）单击位于窗口底部的Close（关闭）按钮，当对话框弹出时，按“Yes”更新合成的图像。

趁此机会，你可以试一试自己的图像压缩策略。调整阈值、熵函数，以及小波的类型，看看能否获得更好的结果。

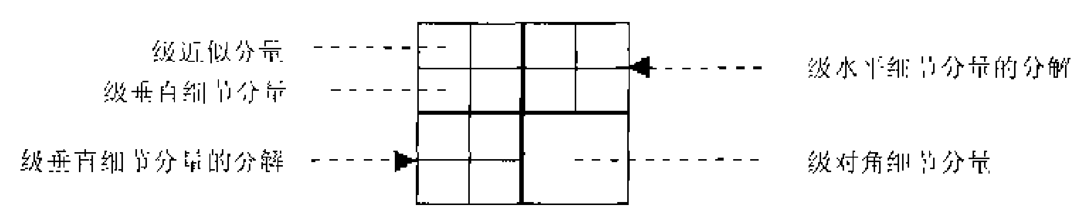
提示：bior6.8 比 haar 小波更适合这类分析，并且可使压缩比达到24:1。

在对本节的工作下结论之前，有必要注意一下“colored coefficients for terminal nodes”（小波包分解端节点系数着色图）并考察一下该图的最佳分解树。



该图位于Wavelet Packet 2-D（二维小波包）窗体的右下角。这个图向我们显示了在小波包分解的过程中，对哪些细节分量进行了分解。较大的方框表示这部分信息没有被进一步分

解，如较小的方框所示的那样，举例来说，如下面的二级分解模型所示：



观察以上指纹图像的分解模式可以明显地看出，最佳分解树算法剔除了对角线细节分量，使得其在后续的分解中不再进行分解，为什么会是这样呢？

考察原始图像可以看到，其大部分信息集中在指纹图像中有尖锐变化的边沿地带。观察这些边缘，可以看到它们主要呈水平向和垂直向。这就解释了为什么最佳分解树算法没有选择对角线细节分量来分解，那是因为它们没有包含什么信息。

§12.5　图形界面方式下输入与输出信息

在一维及二维小波包工具界面下，可以从磁盘调入信息，或者将分析结果保存到磁盘上。如果文件或数据的格式正确，你可以：

- 将分解结果及合成信号与图像在小波包图形界面下保存磁盘上；
- 把信号、图像，以及一维或二维分解结果从磁盘读入工作内存中。

一、把信息保存到磁盘上

图形工具界面具有保存信息的功能，采用特定的文件格式，你可以保存合成的信号或图像，一维或二维小波包分解结构。要实现这一功能可以通过命令行方式，也可以在图形界面方式下实现。

- **保存合成信号**

在 Wavelet Packet 1-D（一维小波包）工具下，对一个信号进行处理后，可以把结果信号保存为 MAT 文件。

例如，调入一个演示分析的例子：File=>Demo Analysis=>with db3 at level 5→Sum of sines，对原信号进行压缩或去除噪声操作，在关闭 Wavelet Packet 1-D De-noising（一维小波包去噪）或 Wavelet Packet 1-D Compression（一维小波包压缩）窗口时，在弹出的对话框中选择 Yes，就可以得到合成的结果信号。

接下来，在 Wavelet Packet 1-D 窗口界面中，选择 File=>Save Synthesized Signal 菜单项。

这时一个对话框会出现，你可以选择保存文件的路径及文件名称。具体到本例，我们给出的文件名为 synthisig。

要将保存的结果调入工作空间中，只需输入：

```
>>Load synthsig
>>whos
```

Name	Size	Elements	Bytes	Class
Synthsig	1 by 1000	1000	8000	double array

- **保存合成图像**

在 Wavelet Packet 2-D（二维小波包）工具下，对一个图像信号进行处理后，可以把结果

保存为 MAT 文件。

例如，调入一个演示分析的例子：File=>Demo Analysis=>db1 depth：1–ent：shannon→woman，对原信号进行压缩操作，在关闭 Wavelet Packet 2-D Compression （二维小波包压缩）窗口时，在弹出的对话框中选择 Yes，就可以得到合成的结果图像。

接下来，在 Wavelet 2-D 窗口界面中，选择 File=>Save Synthesized Image 菜单项。

这时一个对话框会出现，你可以选择保存文件的路径及文件名称。具体到本例，我们给出的文件名为 wpsymage。

要将保存的结果调入工作空间中，只需输入：

```
>>Load wpsymage
>>whos
```

Name	Size	Elements	Bytes	Class
Map	255 by 3	765	6120	double array
wpsymage	256 by 256	65536	524288	double array

- **保存一维分解结构**

在 Wavelet Packet 1-D（一维小波包分析）工具下，我们可以将整个小波包分解树及相关的数据都保存到磁盘上。文件将以 MAT 格式保存，文件名后缀为 wp1（表示一维小波包）。

按如下方式在 Wavelet Packet 1-D（一维小波包分析）工具下，打开一个分析实例：

File=>Demo Analysis=>db1 – depth:2 – ent: shannon→sumsin

要保存本次分析的结果，选择菜单项：File=>Save Decomposition。这时屏幕上会弹出一个对话窗口，使你可以输入保存文件的路径及文件名称，这里我们输入文件名：wpdecex。

最后分解数据保存到了文件 wpdecex1d.wp1 中，按如下方法可以把数据再读入工作空间：

```
>>load wpdecex1d.wp1 – mat
>>whos
```

Name	Size	Elements	Bytes	Class
data_name	1 by 6	6	48	double array
data_struct	1 by 1057	1057	8456	double array
tree_struct	2 by 5	3	80	double array

变量 data_struct 及 tree_struct 包含的是小波包分解的结构（分解树和分解结果系数）。另外一个变量则包含的是数据名称。

- **保存二维分解结构**

在二维小波包分解情况下，保存文件的格式、变量及约定与一维情况下完全一样，只有文件名后缀不同，这里为 wp2（表示二维小波包）。变量名称也与一维的一样，只是多了一个存储颜色图的矩阵变量 map：

Name	Size	Elements	Bytes	Class
data_name	1 by 5	5	40	double array
data_struct	1 by 65590	65590	524720	double array
map	255 by 3	765	6120	double array
tree_struct	3 by 5	15	120	double array

二、输入信息

在图形工具界面下，我们可以输入信号、图像、一维或二维分解结果。这些输入的信息可以是先前保存的结果，还可能是当初在命令行方式下生成的信息。

无论哪种情况，你必须保证文件的格式或结构正确，否则，就会产生错误。

● **输入信号**

要在图形工具界面下输入信号，首先必须保存一个信号，其次，保存的信号的文件名必须与变量名相同。

例如，假设你已经生成了一个信号，名称为 warma，并且想要在 Wavelet Packet 1-D（一维小波包分析）图形工具界面中对其进行分析，则按一下方式保存信号：

```
>>lsave warma
```

这里，变量 warma 必须是一个矢量。

```
>>sizwarm = size(warma)
sizwarm =
        1       1000
```

要在 Wavelet Packet 1-D 中输入这个信号，使用菜单项：File=>Load Signal。

当打开文件对话框出现时，选择适当的文件即可。

● **输入图像**

该工具箱仅支持索引图像。所谓索引图像，它是一个矩阵，其矩阵元素是 1 到 n 的整数，n 就是图像中包含的最大颜色数。

通常图像文件中都伴随一个名为 $n\times3$ 的矩阵，这个矩阵是与图像有关的颜色图。在 MATLAB 显示这样一个图像时，它是利用图像矩阵中值作为索引，在颜色图矩阵中查询对应的颜色值来显示。

要将你在 MATLAB 环境下构造好的图像文件调入 Wavelet Packet 2-D，必须先将这个图形变量（以及颜色图变量 map）以 MAT 格式保存，同时，保存的文件名必须与图像变量名称相同。

比如，假定你已经创建了一个名为 brain 的图像，按如下方式保存：

```
>>lsave brain
```

若要将该图像调入 Wavelet Packet 2-D，使用菜单项：File=>Load Image。

当打开文件对话框出现时，选择适当的文件即可

● **输入小波包分解结构**

如果你先前以适当的格式将小波包分解过程数据保存为 MAT 格式的文件，那么，现在你就可以在图形工具界面下将一维或者二维小波包分解过程数据调入当前的工作空间。

对由图形工具生成的数据文件的修改需要谨慎行事，小波包数据结构非常复杂，而图形工具对数据不做一致性检查，如果调入的数据格式不正确，就会产生错误的结果。

一维小波包分析结果中其数据结构应包含如下变量：

变　量	说　明
data_name	用于小波包分析的数据变量名
Data_struct	小波包分解结构化数据（以特定格式存放的分解结果）
Tree_struct	矢量，表示小波包分解树结构

这些变量必须都保存在一个 MAT 文件中，文件名的后缀为.wp1。

二维小波包分析结果中其数据结构应包含如下变量：

变量	说明
data_name	用于小波包分析的数据变量名
data_struct	小波包分解结构化数据（以特定格式存放的分解结果）
map	图像颜色图
tree_struct	矢量，表示小波包分解树结构

这些变量必须都保存在一个 MAT 文件中，文件名的后缀为.wp2。

要想输入正确格式的数据，利用菜单选项：File=>Load Decomposition Structure，在弹出的打开文件窗口中选择合适的文件即可。

附录　MATLAB 小波分析工具箱命令一览表

GUI（图形用户界面）工具

函数(命令)名称	说　明
wavemenu	启动图形用户界面

小波：总览

函数(命令)名称	说　明
biorfilt	双正交小波滤波器组
dyaddown	二进降采样
dyadup	二进过采样
intwave	积分小波函数 ψ
orthfilt	正交小波滤波器组
qmf	积分镜像滤波器
wavefun	小波函数与尺度函数
wavemngr	小波函数管理器
wfilters	小波滤波器
wmaxlev	小波分解的最大级数

小波家族

函数(命令)名称	说　明
biorwavf	双正交样条小波滤波器
coifwavf	Coif 小波滤波器
dbaux	Daubechies 小波滤波器的计算
dbwavf	Daubechies 小波滤波器
mexihat	墨西哥草帽小波
meyer	梅耶（Meyer）小波
meyeraux	梅耶（Meyer）小波辅助函数
morlet	Morlet 小波
symwavf	对称小波滤波器

连续小波：1-D（一维）

函数(命令)名称	说　明
cwt	计算连续一维小波系数

离散小波：1-D

函数(命令)名称	说　明
appcoef	一维小波分解后，提取近似部分系数
detcoef	一维小波分解后，提取细节部分系数
dwt	一维离散小波变换（单级分解）
dwtper	一维离散小波变换（周期小波分解）
dwtmode	离散小波变换扩展模式
idwt	离散小波逆变换

函数(命令)名称	说　　明
upcoef	利用一维小波系数直接重构小波近似或细节系数
upwlev	由小波分解结构重构上一级分解结构并计算该级近似系数
wavedec	一维小波分解（多级）
waverec	一维小波重建（多级）
wrcoef	由一维小波分解结果重建某个节点系数

离散小波：2-D

函数(命令)名称	说　　明
appcoef2	提取二维近似系数
detcoef2	提取二维细节系数
dwt2	二维离散小波变换（单级分解）
dwtper2	二维离散小波变换（分期小波分解）
dwtmode	离散小波变换扩展模式
idwt2	二维离散小波逆变换
idwtper2	离散小波逆变换（分期小波分解）
upcoef2	利用二维小波系数直接重构近似或细节系数
upwlev2	由小波分解结构重构上一级分解结构并计算该级近似系数
wavedec2	二维小波分解（多级）
waverec2	二维小波重建（多级）
wrcoef2	由二维小波分解结果重建某个节点系数

小波包算法

函数(命令)名称	说　　明
besttree	计算最佳分解树（小波包）
bestlevt	计算最佳标准分解树（小波包）
entrupd	熵校正（小波包）
wentropy	熵（小波包）
wp2wtree	从小波包分解树中提取小波树
wpcoef	计算某个节点的系数
wpcutree	由已分解的结构信息重新进行小波包分解
wpdec	一维小波包分解
wpdec2	二维小波包分解
wpfun	小波包函数
wpjoin	在对某个节点数据修改后，重新计算分解树及分解结构
wprcoef	重建小波包系数
wprec	一维小波包重建
wprec2	二维小波包重建
wpsplt	分离（分解）小波包，单独分解某个节点

信号去噪与图像压缩

函数(命令)名称	说　　明
ddencmp	信号去噪或图像压缩时，计算小波分析所需的缺省参数
thselect	根据某个阈值原则选择阈值
wden	一维小波自动去噪分析
Wdencmp	小波方法去噪或压缩
Wnoise	生成带噪声的数据，以便对小波进行测试

续表

函数(命令)名称	说　明
Wnoisest	对小波分解系数进行噪声估计
wpdencmp	小波包方法去噪或压缩
Wpthcoef	对小波包系数进行阈值比较，并得到新的数据结构
Wthcoef	对一维小波系数进行阈值比较，并得到新的数据结构
wthcoef2	对二维小波系数进行阈值比较，并得到新的数据结构
Wthresh	计算软性或硬性阈值

分解树管理

函数(命令)名称	说　明
Allnodes	得到全部树节点的索引
depo2ind	将节点位置转换为节点索引
ind2depo	将节点索引转换为节点（纵深）位置
Isnode	如果节点存在则返回真值
Istnode	如果是端节点则返回真值
Maketree	构造小波包分解树
Nodeasc	返回按升序排列的节点索引
Nodedesc	返回按降序排列的节点索引
Nodejoin	当某个节点被修改后，返回整个修改后的树结构
Nodepar	返回某个节点的父节点
Nodesplt	对某个节点再次分解
Ntnode	计算端节点数目
Plottree	绘图树结构
Tnodes	计算分解树端节点索引
Treedpth	计算分解树的深度（最大分解级数）
Treeord	计算分解的阶数
Wdatamgr	数据结构管理器
Wtreemgr	分解树结构管理器

小波信息

函数(命令)名称	说　明
Waveinfo	获得关于某个小波的信息

参 考 文 献

陈逢时，子波变换理论及其在信号处理中的应用，国防工业出版社，1998。

程正兴，小波分析算法与应用，西安交通大学出版社，1998。

崔锦泰（美）著，程正兴译，小波分析导论，西安交通大学出版社，1995。

李世雄、刘家琦，小波变换和反演数学基础，地质出版社，1994。

刘贵忠、邸双亮，小波分析及其应用，西安电子科技大学出版社，1992。

秦前清、杨宗凯，实用小波分析，西安电子科技大学出版社，1994。

赵松年、熊小芸，子波变换与子波分析，电子工业出版社，1996。

张贤达，现代信号处理（第十二章），清华大学出版社，1995，pp.485～554。

Arneodo, A., G.Grasseau and M.Holschneider, Wavelet transform of multifractals, Physical Rev. Let., 61(20), 2281～2284, 1988.

Benedetto, J.J., and M.W.Frazier (eds.), Wavelets: Mathematics and Applications, CRC Press, Boca Raton, Florida, 1993.

Beylkin, G., R. Coifman and V. Rokhlin, Fast wavelet transforms and numerical algorithms, Comm. Pure and Appl. Math. 44, 141～183, 1991.

Chui, C.K., Wavelet—a Tutorial in Theory and Applications, Wavelet Analysis and its Applications, Vol.2, Academic Press, New York, 1992.

Cohen, L., Time-frequency distributions - a review, Proc. Of the IEEE, 77(7), 941～981, 1989.

Coifman, R.R., Y.Meyer and V.Wickerhauser, Size properties of wavelet-packets, in Ruskai et al., Wavelets and Their Applications, Jones and Bartlett Publishers, 453～470, 1992.

Combes, J.M., A. Grossmann, Ph. Tchamitchian (eds.), Wavelets: Time-Frequency Methods and Phase-Space, Proc. Of the Int. Conf., Marseille, France, December 14～18, 1987, Springer-Verlag, 1989.

Dauhechies. I., Orthonormal bases of compactly supported wavelets, Commun. On Pure and Appl. Math., Vol.XLI, 901～996, 1988.

Dauhechies, I., The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis, IEEE Trans. Info. Theory, 36(5), 1990.

Dauhechies, I. and J.C.Lagariars Two-scale difference equations I. Existence and global regularity of solutions, SIAM J. Math. Anal., 22(5), 1388～1410, 1991.

Dauhechies. I. and J.C.Lagariars Two-scale difference equations II. Local regularity, infinite products of matrices and fractals, SIAM J. Math. Anal., 23(4), 1031～1079, 1992.

Farge, M., Wavelet transforms and their applications to turbulence, Annu. Rev. Fluid Meth., 24, 395～457, 1992.

Farge, M., J.R.Hunt, J.C.Vassilicos (eds.), Wavelets, Fractals and Fourier Transforms: New Developments and New Applications, Oxford University Press, Oxford, 1991.

Fiandrin, P., Time-frequency and time-scale, IEEE Fortieth Annual ASSP Workshop on Spectrum Estimation and Modeling, Minneapolish Minnesota, 77～80,1988.

Frisch, M.and H.Messer, The use of the wavelet transform in the direction of and unknown transient signal, IEEE Trans. On Information Theory, Vol. 38, 892～896, 1992.

Gabor, D., Theory of communications, J.Inst. Elec. Eng., Vol.93, 429～457, 1946.

Gouplillaud, P., A. Grossmann and J. Morlet, Cycle-octave and related transforms in seismic signal analysis, Geoexploration, 23, 85～102, 1984.

Grossmann, A., R. Kronland-Martinet, and J. Morlet, Reading and understanding continuous wavelet transforms, in Wavelets, J. Combers, A.Grossmann, and Ph. Tchamitchian (eds.), Springer-Verlag, berlin, NY, 2～20, 1989.

Grossmann, A. and J. Morlet, Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape, SIAM J. Math. Anal. 15(4), 723-736,1984.

Jawerth. B., and W. Sweldens, An overview of wavelet based multiresolution analysis, to appear, SIAM review, 1984.

Mallat. S., A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation, IEEE Trans. on Pattern Anal. and Mach. Intel., 11(7), 674～793, 1989.

Mallat. S. Multifrequency channel decomposition of images and wavelet models, IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Anal. 37(12), 2091～2110, Dec. 1989.

Mallat. S., Zero-crossings of a wavelet transform, IEEE Trans. Inform. Theory. 37 (4), 1019～1033, 1991.

Mallat. S. and L. Hwang, Singularity detection and processing with wavelets, IEEE Trans. Inform. Theory, 38(2), 617～643, 1992.

Mallat. S. And S. Zhong, Wavelet transform maxims and multiscale edges, in Wavelets and Their Applications, M.B.Ruskai, G.Beylkin, R.Coifman, I.Daubechies, S.Mallat, Y.Meyer, L.Raphael, eds., Jones and Bartlett, Boston, 1992.

Mallat. S. and S. Zhong, Complete signal representation from multiscale edges, IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell, 14(7), 710～732, 1992.

Marr, D. And E. Hildreth, Theory of edge detection, Proc. Royal Soc. 207,187～217, 1980.

Meyer, Y., Wavelets: Algorithms and Applications, SIAM, Philadelphia, 1993.

Meyer, Y. And S.Roques (eds.), Progress in wavelet analysis and applications, Editions Forfeiters, France, 1993.

Morlet, J., G.Arens, E. Fourgeau, and D.Giard, Wave propagation and sampling theory-part 1: complex signal and scattering in multilayered media, Geophysics, 47(2), 203～221, 1982.

Morlet, J., G. Arens, E. Fourgeau, and D.Giard, Wave propagation and Sampling theory-part 2: sampling theory and complex waves, Geophysics, 47(2), 222～236, 1982.

Rioul, O. and M.Vetterli, Wavelets and signal processing, IEEE Signal Processing Magazine, 14～38, Oct. 1991.

Ruskai, M.B., G.Beylkin, R.Coifman, I. Daubechies, S.Mallat, Y.Meyers, and L.Raphael (eds.), Wavelets and their Applications, Jones and Bartlett Publishers, 1992.

Saito, N. and G.Beylkin, Multiresolution representations using the auto-correlation function of compactly supported wavelets, IEEE Trans. on Signal Processing, 41(12), 3584～3590, 1993.

Strang, G., Wavelets and dilation equations: a brief introduction, SIAM Rev., 31(4), 614～627, 1989.

Strichartz, R.S., How to make wavelets, The Amer. Mathematical Monthly, 100(6), 539～556, 1993.

Temme, N.M., Wavelets: First steps, T.H.Koornwinter (eds.), Wavelets: An elementary treatment of theory and application, World Scientific, Singapore, 1～12, 1993.

Wickerhuaser, V., High-resolution still picture compression Digital Signal Processing: A Review Journal, 2(4), 204～226,1992.